

Mémo Informatique théorique

1 Résumé des règles de la déduction naturelle

1.1 Règles de base

ax./ass.	Axiome ou Assomption	$\Gamma, A \vdash A$
$\rightarrow_i$	Théorème de déduction	Si $\Gamma, A \vdash B$ alors $\Gamma \vdash A \rightarrow B$
$\rightarrow_e$	Modus ponens	Si $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ et $\Gamma \vdash A$, alors $\Gamma \vdash B$
$\wedge_i$	Intro. de la conjonction	Si $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash B$, alors $\Gamma \vdash A \wedge B$
$\wedge_{e1}$	Élim. de la conjonction	Si $\Gamma \vdash A \wedge B$ alors $\Gamma \vdash A$
$\wedge_{e2}$	Élim. de la conjonction	Si $\Gamma \vdash A \wedge B$ alors $\Gamma \vdash B$
$\vee_{i1}$	Intro. de la disjonction	Si $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \vdash A \vee B$
$\vee_{i2}$	Intro. de la disjonction	Si $\Gamma \vdash B$ alors $\Gamma \vdash A \vee B$
$\vee_e$	Élim. de la disjonction	Si $\Gamma \vdash A \vee B$ et $\Gamma, A \vdash C$ et $\Gamma, B \vdash C$, alors $\Gamma \vdash C$
$\neg_i$	Intro. de la négation	Si $\Gamma, A \vdash \perp$ alors $\Gamma \vdash \neg A$
$\neg_e$	Raison. par l'absurde	Si $\Gamma, \neg A \vdash \perp$ alors $\Gamma \vdash A$

1.2 Principales règles dérivées

Affaiblissement (ajout d'hypo.)	Si $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma, B \vdash A$
Règle de remplacement	Si $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$ et $\Gamma \vdash C$, alors $\Gamma \vdash C[A/B]$
Élim. de la double négation	Si $\Gamma \vdash \neg\neg A$ alors $\Gamma \vdash A$
Principe d'explosion ¹	Si $\Gamma \vdash \perp$ alors $\Gamma \vdash A$
Principe d'explosion (dérivée 1)	Si $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma, \neg A \vdash \perp$
Principe d'explosion (dérivée 2)	Si $\Gamma \vdash \neg A$ alors $\Gamma \vdash A \rightarrow B$
Par élimination des possibilités	Si $\Gamma \vdash A \vee B$ et $\Gamma \vdash \neg A$, alors $\Gamma \vdash B$
Contraposée	Si $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ alors $\Gamma \vdash A \rightarrow B$
Raisonnement par cas	Si $\Gamma, A \vdash B$ et $\Gamma, \neg A \vdash B$ alors $\Gamma \vdash B$
Syllogisme hypothétique	Si $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ et $\Gamma \vdash B \rightarrow C$, alors $\Gamma \vdash A \rightarrow C$

1.3 Quelques tautologies (autres règles dérivées)

Identité	$\vdash A \rightarrow A$	Loi de De Morgan (1)	$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
Tiers exclus ²	$\vdash A \vee \neg A$	Loi de De Morgan (2)	$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
Non contradiction	$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$	Contradictions	$\vdash A \vee \perp \leftrightarrow A$ et $\vdash A \wedge \perp \leftrightarrow \perp$
Loi de Peirce	$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	Implication matérielle	$\vdash A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$

Abréviations : $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$, $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ et $\top \equiv \neg \perp$.

Rappels : les opérateurs $\vee$, $\wedge$ et $\leftrightarrow$ sont commutatifs et associatifs.

Distributivité $\vee$: $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Distributivité $\wedge$: $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

1. *ex falso quodlibet*

2. *tertium non datur*

1.4 Remarques

1.4.1 Notations

Suivant les auteurs, les symboles $\rightarrow$ ou $\Rightarrow$ sont utilisés pour l'implication. On rencontrera de même $\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ pour la bi-implication.

La négation de A peut se voir écrite $\neg A$, mais aussi $\sim A$.

1.4.2 Ne pas confondre

La notation $A \equiv B$ est un *jugement* exprimant que les formules A et B sont *équivalentes*, alors que le *connecteur* $\rightarrow$ permet de construire la *proposition* $A \rightarrow B$.

1.5 Dédution naturelle et implication sémantique

On admettra les deux résultats suivants :

- Si $\Gamma \vdash A$, alors $\Gamma \models A$ (*cohérence*)
- Si $\Gamma \models A$, alors $\Gamma \vdash A$ (*complétude*)