D. Performances photométriques

1. Introduction

La photométrie est l'étude et la mesure du transport d'énergie par les faisceaux lumineux. La photométrie physique ou radiométrie est le domaine qui étudie la mesure de l'énergie transportée par les rayonnements électromagnétiques sur tout le spectre. La photométrie visuelle étudie plus spécifiquement les rayonnements visibles du point de vue de la vision humaine. On utilisera le terme photométrie pour tous les cas étudiés.

Dans ce chapitre nous nous intéressons spécifiquement à la photométrie dans les instruments qui forment des images. Une image peut être vue comme un flux de lumière localisée sur une surface. Le **flux** est une puissance optique et son unité énergétique est le **watt (W)**. On peut également l'exprimer comme un nombre de photon émis par seconde (on parle d'unité photonique). Chaque photon porte une énergie hc/λ (h : constance de Palnck, c : vitesse de la lumière dans le vide)

Exemple : Un pointeur laser de puissance P de 1 mW dans le vert émet un nombre de photon par seconde d'environ $N = \frac{P\lambda}{hc} = 10^{15} s^{-1}$. A titre de comparaison, un des plus gros laser du monde (le NIF aux US) en émet $10^{24} s^{-1}$. Il vient d'obtenir le seuil d'ignition de fusion nucléaire.

Le flux par unité de surface s'exprime en **W.m^{-2}** et se nomme l'**éclairement**. C'est cette grandeur qui sera pertinente à calculer dans une image d'un objet étendue. Par exemple, l'éclairement sur Terre du au Soleil vaut approximativement 1300 W.m^{-2}.

Dans le cas de la vision humaine, le flux va dépendre de la longueur d'onde car la sensibilité spectrale de l'œil n'est pas constante sur le spectre visible. Il a donc été défini une unité visuelle appelée **lumen (lm)** qui correspond au maximum de sensibilité en vision de jour. Le lumen équivaut à 1/683 de Watt à la longueur d'onde de 555 nm (historiquement défini avec une bougie). 1 lumen correspond à peu de chose près au flux émis par la pleine lune. La led d'un smartphone émet environ quelques dizaines de lumen. En unité visuelle l'éclairement s'exprime en **lux** (lm.m^{-2}).

Revenons à notre système optique et cherchons à calculer le flux dans l'image formée. On sait que dans le champ de pleine lumière d'un instrument, tous les rayons passant par la pupille d'entrée ressortent par la pupille de sortie pour former l'image. Une lentille ne transmet généralement pas 100% de la lumière incidente car il peut y avoir des réflexions résiduelles sur les faces (traitement anti-reflet imparfait), de la diffusion car les surfaces ne sont pas parfaitement polies… Toutes ces pertes se cumulent (par exemple les coefficients de réflexion d'un miroir ou de transmission d'une lentille se multiplient), si bien qu'on peut dire que le flux qui sort par la pupille de sortie est directement lié au flux entrant par la pupille d'entrée modulo les pertes diverses des éléments optiques (paramètre τ),

$$F_{image} = F_{sortant\ de\ PS} = \tau \times F_{entrant\ dans\ PE}$$

Tout se ramène au calcul du flux émis par l'objet qui entre dans la pupille d'entrée de l'instrument. Nous allons dans un premier temps chercher à calculer ce flux pour un point sur l'axe puis nous étendrons à l'ensemble de l'objet étendu spatialement.

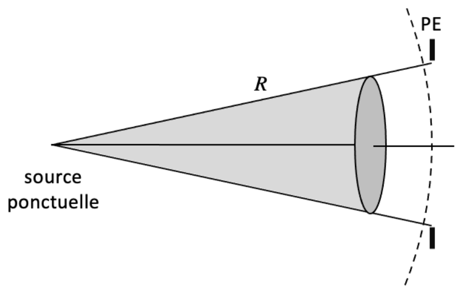
2. Source ponctuelle – notion d'intensité et d'angle solide

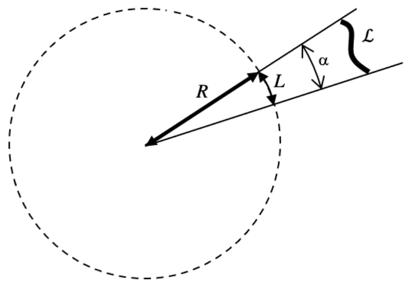
Une source ponctuelle émet dans tout l'espace un flux lumineux de façon isotrope. Le flux émis par la source qui entre dans la pupille d'entrée de l'instrument est donc, en première approximation, le flux émit dans le cône équivalent à la portion de sphère qui s'appuie sur la surface de la pupille d'entrée (PE) et dont le centre est la source. Cette expression n'est plus valable si le cône est trop ouvert. La portion de sphère s'écarte du plan tangent qu'est la pupille. On a donc,

$$F_{entrant\ dans\ PE} = F_{total\ source} \times \frac{S_{PE}}{4\pi R^2} = \frac{F_{total\ source}}{4\pi} \times \frac{S_{PE}}{R^2}$$

Après regroupement deux à deux, il vient,

$$F_{entrant\ dans\ PE} = \frac{F_{total\ source}}{4\pi} \times \frac{S_{PE}}{R^2}$$





Le deuxième terme de l'égalité représente un équivalent tridimensionnel d'un angle plan qu'on appelle **angle solide** et habituellement noté Ω. Son unité est le **stéradian** (**sr**). L'angle plan α, sous lequel est vu une courbe $\mathcal{L}$ depuis un point est défini, dans l'espace bidimensionnel, comme le rapport de la longueur$L$ de l'arc projeté de $\mathcal{L}$ sur un cercle de rayon R. L'angle solide d'une surface quelconque est défini de façon analogue comme le rapport de la superficie projetée de la surface sur une sphère de rayon R sur son rayon au carré. Première constatation, l'angle solide de tout l'espace est égal à 4π.

$$\Omega_{espace} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi\ sr$$

Le premier terme représente alors le flux émis par la source de façon isotrope (car c'est une source ponctuelle) dans l'angle solide correspond à tout l'espace. C'est un flux par unité d'angle solide. On parle d'**intensité** dont l'unité énergétique est le **W.sr^{-1}** et l'unité visuelle est le **candela** (équivalent à des lm.sr^{-1}).

$$I = \frac{dF}{d\Omega}$$

L'intensité d'une source ponctuelle ou quasi-ponctuelle est donc la grandeur photométrique pertinente. Sa connaissance permet de calculer le flux entrant dans un instrument via la notion d'angle solide. La variation de l'intensité lumineuse en fonction de la direction d'émission s'appelle le diagramme de rayonnement. Sa connaissance (en fonction des coordonnées d'espace) permet de calculer le flux qui passe par une surface S quelconque. Dans le cas de coordonnées polaires on peut écrire,

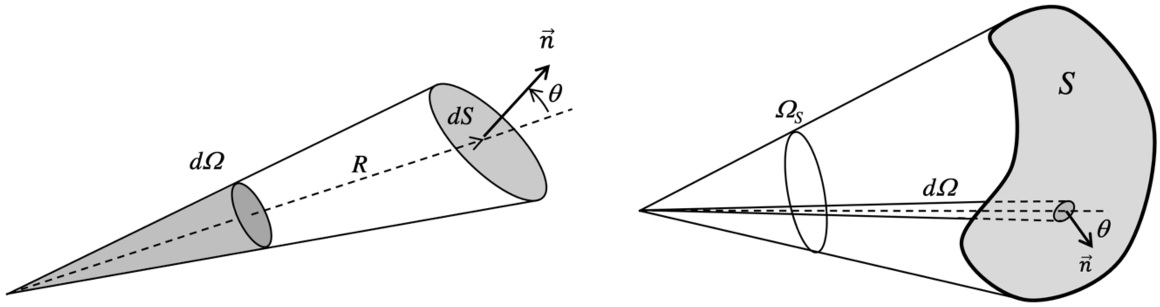
$$\mathrm{F}_S = \int_\theta \int_\varphi I(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega$$

Où $\mathrm{d}\Omega$ représente un angle solide élémentaire sur la surface considérée. Si l'intensité est constante dans la surface considérée (cas d'une source isotrope par exemple) alors le calcul du flux se ramène à un calcul d'angle solide par intégration sur la surface d'un angle solide élémentaire.

Angle solide élémentaire

Dans le cas d'une surface infinitésimale dS, sa projection sur la sphère sera elle-même si sa normale est colinéaire au rayon. Dans le cas où l'élément de surface présente une obliquité, la surface apparente projetée sur la sphère est réduite du cosinus de l'angle d'inclinaison. L'expression générale de l'angle solide élémentaire vaut donc, pour une surface oblique,

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{dS \times cos\theta}{R^2}$$



Angle solide élémentaire et angle solide quelconque

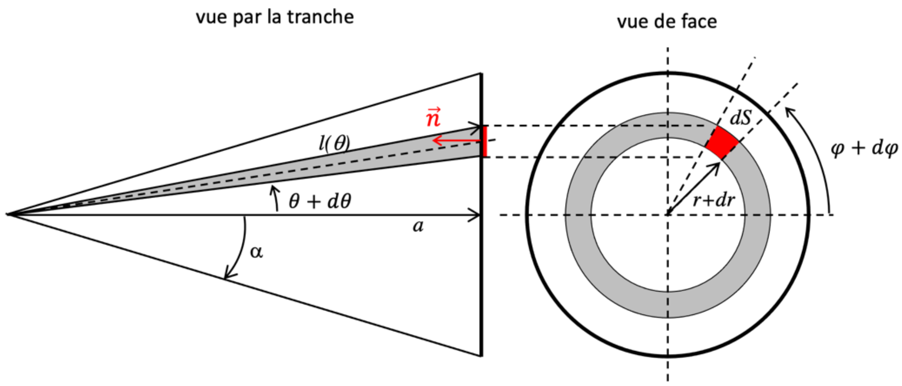
Angle solide quelconque

L'angle solide sous lequel est vue une surface quelconque est plus complexe à calculer. Il faut découper la surface en surfaces élémentaires et intégrer. Pour chaque élément de surface, l'obliquité et la distance au point où on veut déterminer l'angle solide, vont varier.

$$\Omega_S = \int \mathrm{d}\Omega = \iint \frac{dS \times cos\theta_{dS}}{\mathrm{R}_{dS}^2}$$

Angle solide d'un disque

Une pupille d'entrée d'un instrument (non obturé) est souvent un disque. Du point objet sur l'axe elle est, par définition de l'ouverture numérique, vue sous un angle α.



$$\Omega_{disque} = \int_{disque} d\Omega = \int_{disque} \frac{dS \times cos\theta}{l(\theta)^2} = \int_{disque} \frac{rd\varphi dr \times cos\theta}{l(\theta)^2}$$

On a également,

$$r = a \times tan\theta \rightarrow dr = \frac{ad\theta}{cos^2\theta}$$
$$a = l(\theta)cos\theta$$

$$\Omega_{disque} = \int_{disque} \frac{atan\theta d\varphi \frac{ad\theta}{cos^2\theta} \times cos\theta}{\frac{a^2}{cos^2\theta}}$$

$$\Omega_{disque} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \, sin\theta$$

L'angle solide élémentaire d'une couronne est $d\varphi d\theta sin\theta$. L'intégrale est simple à calculer, soit,

$$\Omega_{disque} = 2\pi(1 - cos\alpha)$$

Si on considère le demi-espace, à savoir $\alpha = \pi/2$, on retrouve que l'angle solide vaut 2π. Si le disque est vu sous un petit angle (c'est le cas de l'optique paraxiale) alors on retrouve l'expression de l'angle solide élémentaire (sans obliquité),

$$\Omega_{disque} \approx \pi\alpha^2 \approx \pi\left(\frac{\phi_{PE}}{2d}\right)^2 = \frac{S_{PE}}{d^2}$$

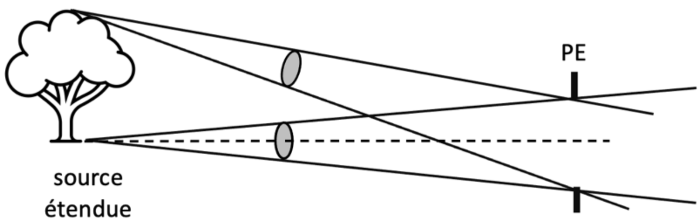
Exemple : clarté dans un instrument visuel
On considère une étoile définit par son intensité. Le flux reçu dans l'œil est le produit de l'intensité de l'étoile et de l'angle solide qui s'appuie sur la pupille de l'œil. Si l'étoile est vue à travers un instrument alors le flux reçu dans l'œil est celui qui passe par la pupille d'entrée de l'instrument, en tenant compte des pertes et en supposant que la pupille de sortie est plus petite que celle de l'œil. On appelle la clarté de l'instrument le gain en termes de flux qui passe par la pupille de l'œil. On a,

$$C = \frac{F_{instru}}{F_{sans}} = \frac{\tau \times I_{source} \times \Omega_{PE}}{I_{source} \times \Omega_{oeil}} \approx \tau \times \frac{S_{PE}}{S_{oeil}} \approx \tau \times \frac{S_{PE}}{S_{PS}} = \tau \times G^2$$

La clarté est proportionnelle au carré du grossissement de l'instrument. On voit donc beaucoup plus d'étoiles avec une lunette d'astronomie qu'à l'œil !

3. Source non ponctuelle – notions de luminance et d'étendue

Dans le cas d'une source non ponctuelle, ou source étendue, le flux entrant dans la pupille d'entrée de l'instrument est la somme des flux de tous les points de la source contenu dans le champ de l'instrument. La notion d'intensité vue précédemment ne peut plus être utilisée directement.



Puisqu'un objet est une infinité de sources ponctuelles, la somme précédemment évoquée tend vers l'infini. Pour s'en sortir il suffit d'intégrer sur la surface émissive une grandeur dont les dimensions sont celle d'un flux (émis) par unité de surface. C'est comme un éclairement mais en émission. Cette grandeur s'appelle l'**exitance** $\mathcal{E}_S$ (ou **émittance**). Si ensuite on réintroduit le flux émis par l'élément de surface considéré comme le produit d'une intensité et d'un angle solide, il vient alors en supposant également que la taille de la source est petite devant la pupille et que l'intensité ne varie pas trop sur l'objet,

$$F_{entrant\ dans\ PE} = \int_{Source} \mathcal{E}_{Source} dS = \int_{Source} \frac{I_{Source}\Omega_{S\to PE}}{S} dS \approx \frac{I_{Source}}{S} \times \Omega_{S\to PE} S$$

Le deuxième terme est le produit de l'angle solide qui part de la source qui s'appuie sur la pupille d'entrée et de la surface de la source S. Cette grandeur caractérise le tube de rayonnement qui contient tous les rayons partant de la source et qui arrivent dans la pupille d'entrée. Cette grandeur se nomme **étendue géométrique** que nous écrivons G.

Le premier terme est une intensité par unité de surface. Cette nouvelle grandeur photométrique s'appelle la **luminance**. Son unité énergétique est le **W.sr^{-1}.m^{-2}** et son unité visuelle est le **cd.m^{-2}** (appelé **nit**). La luminance est le flux par unité d'étendue géométrique. C'est la grandeur pertinente lorsque la source n'est pas ponctuelle.

$$L = \frac{dF}{dG}$$

La luminance peut varier sur la source (coordonnées x,y) et peut varier en direction d'émission (coordonnées θ, φ). La détermination du flux émis à travers une surface par une source de luminance non constante nécessite de calculer une intégrale complexe,

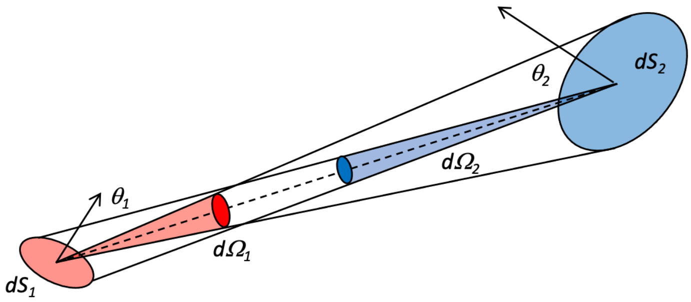
$$\mathrm{F}_{Source \to PE} = \int L(x, y, \theta, \varphi) \mathrm{dG}$$

Si la luminance est constante, on dit que la source est lambertienne (ou orthotrope). Dans ce cas l'intégrale précédente se ramène à un calcul d'étendue géométrique.

$$\mathrm{F}_{Source \to PE} = L \times \int \mathrm{dG}$$

Où dG représente l'étendue géométrique élémentaire entre deux surfaces élémentaires.

Étendue géométrique élémentaire
Considérons deux surfaces élémentaires dS_1 et dS_2 séparées d'une distance d et présentant une obliquité $\theta_1$et θ_2 par rapport à la directrice.



On a vu que l'étendue géométrique est le produit d'une surface et de l'angle solide sous lequel la surface voit une autre surface. On a donc

$$\mathrm{dG} = dS_1 \times cos\theta_1 \times d\Omega_1$$

L'angle solide élémentaire a été décrit ci-dessus et on a également,

$$\mathrm{dG} = dS_1 \times cos\theta_1 \times \frac{dS_2 \times cos\theta_2}{d^2}$$

En remaniant cette expression on obtient,

$$\mathrm{dG} = \frac{dS_1 \times cos\theta_1}{d^2} \times dS_2 \times cos\theta_2 = d\Omega_2 \times dS_2 \times cos\theta_2$$

L'étendue géométrique élémentaire peut s'écrire indépendamment de l'une ou l'autre surface.

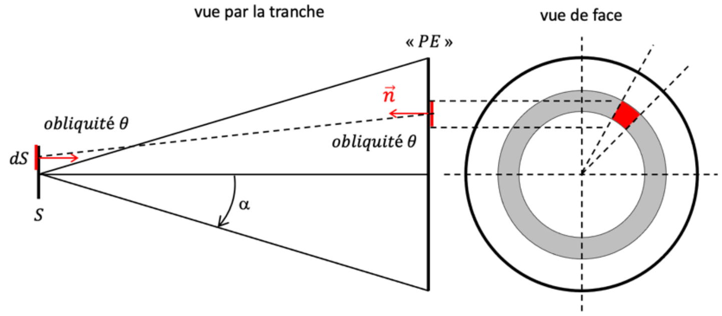
Si la taille des surfaces est petite devant la distance les séparant, cette expression peut être utilisée. C'est généralement le cas en optique paraxiale.

Étendue géométrique entre une petite surface et un disque

C'est le cas usuel en optique paraxiale. Une petite surface objet S éclaire la pupille d'entrée d'un système optique. Le calcul de l'étendue géométrique doit donc tenir compte du fait que sur la surface objet l'obliquité varie. En utilisant l'angle solide élémentaire sur une couronne, il vient alors l'intégrale suivante pour déterminer l'étendue entre la petite surface S et une autre surface « pupille d'entrée » vue sous l'angle α,

$$G_{S-PE} = \int dG = \int dScos\theta \times d\Omega_{couronne} = \int_S dS \int_0^{\alpha} cos\,\theta sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$G_{S-PE} = \pi S \times sin^2\alpha$$



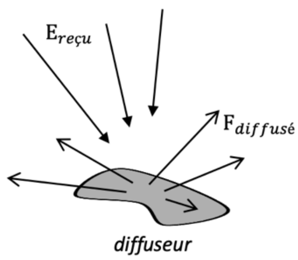
L'étendue géométrique entre la petite surface et le demi-espace vaut πS. Le flux émis dans le demi-espace de notre petite surface, ayant une luminance L supposée lambertienne, vaut simplement πLS.

Dans le cas usuel des petites ouvertures, l'étendue géométrique se simplifie et on retrouve l'expression de l'étendue élémentaire entre S et la surface de la pupille d'entrée située à distance d sans obliquité,

$$G_{S-PE} = \pi S \times \alpha^2 = \pi S \times \left(\frac{\phi_{PE}}{2d}\right)^2 = \frac{S \times S_{PE}}{d^2}$$

Luminance d'un diffuseur lambertien

La luminance d'un diffuseur « parfait », c'est-à-dire lambertien, de surface S peut être évaluée simplement par l'éclairement qu'il reçoit de la source qui l'éclaire. Écrivons le flux que le diffuseur réémet en introduisant ρ le facteur de réflectivité de la surface, appelée albedo.



$$F_{diffusé} = \rho \times F_{reçu}$$

Le diffuseur étant lambertien, il émet dans le demi-espace. On a donc également

$$F_{diffusé} = \pi S \times L_{diffuseur} = \rho \times F_{reçu}$$

On en déduit alors sa luminance,

$$L_{diffuseur} = \frac{\rho}{\pi} \times E_{reçu}$$

Conservation de l'étendue optique et implications

Considérons une étendue géométrique élémentaire à la traversée d'un dioptre ou à la réflexion sur une surface. Écrivons l'étendue de part et d'autre d'une interface

$$dG_i = dS_i cos\theta_i d\Omega_i \text{ où } i = 1,2$$

L'angle solide élémentaire en coordonnées sphériques est équivalent à celui déterminé plus haut pour la couronne,

$$d\Omega_i = d\varphi_i d\theta_i sin\theta_i$$

$d\varphi_i$ représente l'angle projeté sur le plan de l'interface et $d\theta_i$ celui projeté sur le plan d'incidence aux rayons. La réflexion ou la réfraction imposent la conservation des grandeurs $d\varphi_i$ et $n_i sin\theta_i$, où n_i est l'indice des milieux. Par dérivation on obtient également la conservation du terme $n_i cos\theta_i d\theta_i$. En réécrivant l'étendue géométrique comme,

$$dG_i = dS_i cos\theta_i d\varphi_i d\theta_i sin\theta_i$$

Et en considérant les invariants vus ci-dessus, on démontre simplement que l'**étendue optique élémentaire**, produit du carré de l'indice et de l'étendue géométrique élémentaire, se conserve.

$$\Rightarrow n_1^2 dG_1 = n_2^2 dG_2$$

Cette conservation de l'étendue optique est directement liée au théorème de Clausius (…).

Nous avons vu au début de ce chapitre que le flux entrant dans la pupille d'entrée se conserve, aux pertes près, dans la pupille de sortie d'un instrument. Le flux reçu dans l'image est donc,

$$F_{image} = F_{sortant\ de\ PS} = \tau \times F_{entrant\ dans\ PE}$$

Nous pouvons réécrire cette expression en faisant intervenir la luminance et l'étendue géométrique.

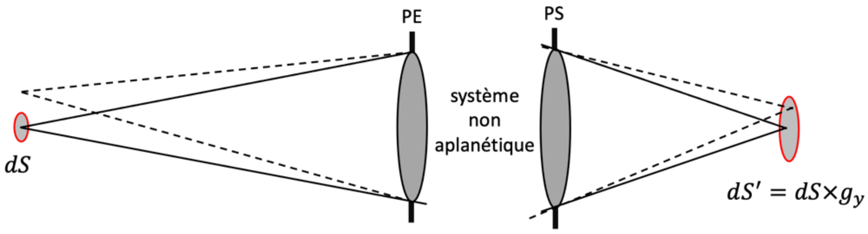
$$L_{image} \times dG_{image-PS} = \tau \times L_{objet} \times dG_{objet-PE}$$

D'après le théorème de Clausius, on déduit également que la luminance dans l'image se conserve aux pertes près et au rapport des indices,

$$\Rightarrow L_{image} = \tau \times \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \times L_{objet}$$

Ce résultat fondamental dit que la luminance de l'image ne pourra pas dépasser celle de l'objet (si les indices sont égaux, cas le plus usuel). Autrement dit, si l'objet est le Soleil et qu'on concentre le flux lumineux (on fait son image au foyer d'un système optique) pour chauffer un fluide alors la température du fluide ne pourra pas dépenser celle du Soleil en vertu du principe de Clausius.

Dans un système optique formant une image, la conservation de l'étendue géométrique est toujours valable au passage des dioptres ou miroirs. En revanche pour écrire l'étendue géométrique entre l'image et la pupille de sortie (même pour des ouvertures importantes) il est nécessaire d'assurer la condition d'aplanétisme. En effet si cette condition n'est pas respectée (figure ci-dessous), une petite portion de l'image sera formée par des points différents de l'objet qui ne sont pas directement conjugués et on ne peut pas appliquer l'expression de l'étendue entre la surface image et la pupille de sortie aussi directement que vu précédemment.



Supposons donc notre système aplanétique, alors on a,

$$L_{image} \times \pi S_{image} sin^2\alpha' = \tau \times L_{objet} \times S_{objet} sin^2\alpha$$

En utilisant la conservation de la luminance on retrouve la relation fondamentale de l'optique instrumentale, la relation des sinus d'Abbe, la conservation du produit $n \times y \times sin\alpha$.

Éclairement dans une image

A partir des expressions ci-dessus, le calcul de l'éclairement dans l'image d'un système aplanétique est aisé. On obtient, pour un objet sur l'axe,

$$E_{image} = \frac{F_{image}}{S_{image}} = \pi \times \tau \times L_{objet} \times sin^2\alpha'$$

Dans le cas d'un système qui travaille proche de la conjugaison infini-foyer l'éclairement se simplifie et devient même constant,

$$E_{image} = \frac{\pi\tau L_{objet}}{4N^2}$$

On voit que l'éclairement est inversement proportionnel au carré du nombre d'ouverture. C'est cette relation qui a motivé d'utiliser une série de raison $\sqrt{2}$ sur les objectifs d'appareil photographique : 1 – 1,4 – 2,8 – 3,6 – 4 – 5,6 – 8 – 11 – 16 … Passer d'un nombre d'ouverture au suivant augmente ou diminue le diamètre de la pupille d'un facteur $\sqrt{2}$ soit une variation d'un facteur 2 sur la surface et donc le temps de pause associé.

- Exemple : facteur de concentration

On définit le facteur de concentration comme le gain en éclairement au foyer d'un système optique. Par exemple, un concentrateur solaire qui forme une image du Soleil à son foyer aura un éclairement plus élevé que l'éclairement fourni au sol. L'éclairement au foyer, d'un système optique d'ouverture numérique image α', a été déterminé ci-dessus et l'éclairement au sol se calcule aisément en introduisant l'angle β sous lequel est vu le Soleil depuis la Terre.

$$C = \frac{E_{foyer}}{E_{sol}} = \frac{\pi \times \tau \times L_{soleil} \times sin^2\alpha'}{\pi \times L_{soleil} \times sin^2(\beta/2)}$$

En supposant le système aplanétique, il vient,

$$C = \frac{\tau}{(N\beta)^2}$$

Le Soleil est vu sous 0,5°. Si on suppose que le système n'a aucune perte et qu'il est ouvert à son maximum, soit N=1/2 alors le facteur de concentration maximale vaut environ 40000. Le four solaire d'Odeillo, situé dans les Pyrénées, est une parabole de 40 mètres de diamètre et 18 mètres de rayon de courbure. Il concentre la lumière à son foyer et permet d'obtenir des températures très élevées (3500°) en quelques secondes. L'installation accueille une équipe de recherche de l'Université de Perpignan qui travaille sur les études thermiques à haute température, les systèmes caloporteurs, la conversion de l'énergie, le craquage de l'eau pour produire de l'hydrogène, le comportement des matériaux à haute température dans des environnements extrêmes. Son facteur de concentration est de 16000. L'écart est lié au défaut de forme (la parabole est construite avec 9500 facettes courbées mécaniquement) et aux aberrations (une parabole n'est pas aplanétique).

- Exemple : clarté dans un instrument visuel

Reprenons le calcul de la clarté, vu dans le cas d'une source ponctuelle (les étoiles), au cas d'une source étendue comme une galaxie à travers un lunette d'astronomie ou une scène forestière à travers une lunette terrestre. L'image sur la rétine sera donc étendue elle-aussi. La clarté est donc ici le gain en éclairement et non celui en flux dans le cas d'une source ponctuelle. On a,

$$C = \frac{E_{instru}}{E_{sans}}$$

En vertu de la conservation de l'étendue géométrique, si la pupille de sortie de l'instrument est plus grande que celle de l'œil alors la clarté vaut simplement le facteur de transmission τ. En revanche si la pupille de sortie est plus petite que celle de l'œil, l'étendue utile est définie par la surface de la pupille de sortie et on a,

$$C = \tau \times \frac{S_{PS}}{S_{oeil}}$$

Au mieux la clarté vaut le coefficient de transmission (qui vaut 1 dans le meilleur des cas). C'est le cas d'une loupe où c'est forcément l'œil qui limite l'ouverture et donc la pupille de sortie utile vaut celle de l'œil. Si c'est l'instrument qui fixe l'ouverture (PS plus petite que l'œil) alors la clarté chutera, ce qui est le cas des lunettes ou télescopes astro. Autrement dit le fond noir de l'espace sera plus noir à travers une lunette qu'à l'œil nu.

Éclairement dans le champ de pleine lumière

Nous avons défini le champ de pleine lumière comme étant la portion du champ où tous les rayons passant dans la pupille d'entrée ressortent dans la pupille de sortie pour construire l'image. D'un point de vue photométrique il est nécessaire de tenir compte de l'obliquité de l'élément de surface qui éclaire la pupille d'entrée. La pupille est elle aussi oblique par rapport à la directrice et la directrice a une longueur corrigée par rapport à la distance objet-pupille sur l'axe. L'étendue géométrique est donc,

$$\mathrm{dG}_{dS(\theta)-PE} = \frac{dScos\theta \times S_{PE}cos\theta}{(d/cos\theta)^2} = \mathrm{dG}_{dS(\theta=0°)-PE} \times cos^4\theta$$

On voit donc que l'étendue évolue à la puissance 4ème de l'angle de champ. Cette évolution dans le champ se retrouve également sur l'image. Cette variation, parfois appelée dôme photométrique, amène à une diminution de l'éclairement pour les points de l'image dans le champ.