

version 27 septembre 2022

Optique Instrumentale

Cycle Ingénieur·e
1^{ère} année



Objectifs pédagogiques

Cet enseignement donne les clés d'une modélisation géométrique (hypothèses de l'optique paraxiale, et méthodes d'analyse) de systèmes optiques imageants.

A l'issue de cet enseignement, vous serez capables :

- De réaliser un tracé de rayons (à l'aide du modèle géométrique en régime paraxial) d'un système optique composé d'une ou plusieurs sous-fonctions (conjugaisons à distances finies, infini-foyer, foyer-infini) en faisant apparaître les rayons utiles pour les conjugaisons objet-image (qui sont délimités par les pupilles) pour un point sur l'axe et pour un point en bord de champ.
- D'identifier et analyser la fonction globale d'un système optique à partir de son schéma optique, en listant et catégorisant les sous-fonctions.
- D'estimer/calculer des paramètres d'un système optique (taille d'image, focales d'objectifs, distances entre deux éléments, grossissements, puissance) à partir de paramètres donnés, à la fois par un raisonnement graphique et par l'usage du formalisme paraxial.
- D'estimer/calculer les performances géométriques (ouvertures, champs, ...), physiques (résolution) et photométriques (flux, éclairement) d'un système optique à partir des paramètres donnés.
- De concevoir une partie d'un système optique à partir d'un cahier des charges de performances attendues (géométriques et photométriques)
- D'esquisser la structure d'un système optique répondant à un cahier des charges global de performances attendues (géométriques et photométriques)

Ce cours sert de prérequis fondamental pour le cours de conception optique abordé en deuxième année.

Ces notes ne sont qu'un support pour le cours magistral (et non l'inverse). De nombreux exemples, QCM et tracés sont vus en séance et n'apparaissent pas dans ce document. L'optique instrumentale s'apprend en faisant les calculs (assez basiques) et en traçant soi-même les rayons (une règle est nécessaire). Les travaux dirigés posent des notions fondamentales à acquérir et permettent de solidifier et mémoriser les connaissances.

Je suis preneur de toutes remarques et détection de coquilles pour faire évoluer au mieux ce document. sebastien.derossi@institutoptique.fr

Sommaire

A. Optique Paraxiale

1. Généralités sur la formation des images
2. Étude du dioptre sphérique
 - Approximation linéaire : les conditions paraxiales
 - Les points d'Young-Weierstrass
 - Stigmatisme en dehors de l'axe optique : aplanétisme
3. Distance focale dans un système centré
4. Conjugaison à distances finies
5. Conjugaison infini-foyer et foyer-infini
6. Conjugaison infini-infini – système afocal
7. Association de systèmes centrés

B. Limitations des faisceaux

1. Notion d'espace
2. Notion de pupille
3. Nombre d'Ouverture et Ouverture Numérique
4. Champ transversal – notion de lucarne
5. Imagerie sur un capteur
6. Instrument visuel
7. Système télécentrique

C. Qualité de l'image - limite de résolution

1. La diffraction
2. Les aberrations
3. Résolution du système optique versus résolution du capteur d'image
4. Le cas de l'œil
5. Profondeur de champ
6. Précisions de pointés

D. Performances photométriques *chapitre non disponible*

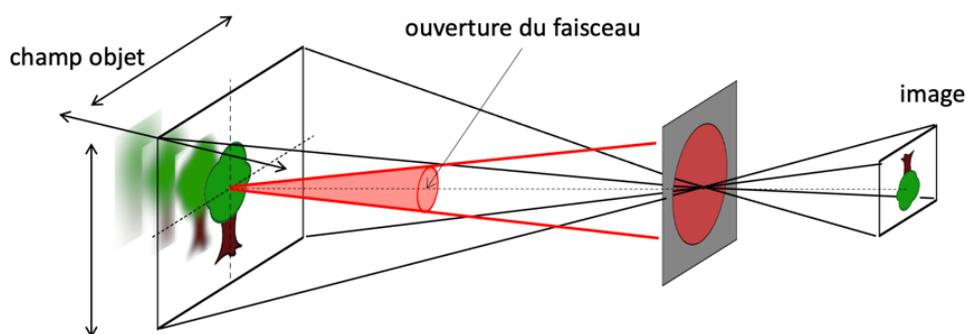
1. Introduction
2. Le Flux
3. L'Éclairement
4. Géométrie d'un faisceau : angle solide, étendue
5. L'Intensité
6. La Luminance
7. Photométrie dans les instruments

A. Optique Paraxiale

1. Généralités sur la formation des images

La formation des images s'appuie sur la capacité d'un système optique à créer un point « image » à partir d'un point source « objet ». Cette propriété géométrique s'appelle le **stigmatisme**. Faire une image d'un objet étendu consiste à traiter en parallèle tous les points de l'objet imagé. Si le stigmatisme est maintenu dans l'image formée, le système est dit **aplanétique**. Le système optique (SO) est dit **dioptrique** s'il comporte que des surfaces réfringentes (qui réfractent), **catoptrique** s'il comporte que des surfaces réfléchissantes (qui réfléchissent), **catadioptrique** s'il comporte les deux types de surfaces. L'image est dite **réelle** si elle peut être projetée sur écran (ou un capteur), et **virtuelle** dans le cas contraire.

Dans ce cours, nous nous limiterons aux systèmes optiques à symétrie de révolution (objectif photographique, jumelle, lunette/télescope pour l'astronomie, microscope, ...). On parle de systèmes optiques centrés. De façon générale, un système optique centré collecte la lumière dans un cône d'**ouverture** s'appuyant à l'intérieur de sa zone d'observation, appelé **champ (de vue)**.



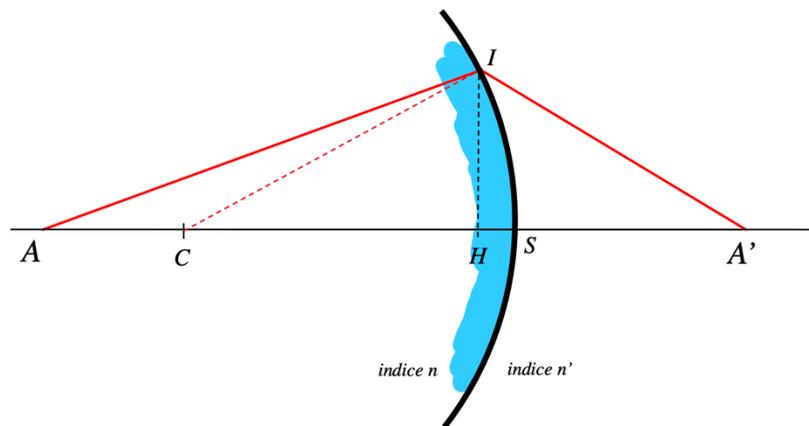
L'**angle d'ouverture** objet (respectivement image) correspond à l'angle du rayon le plus incliné qui entre dans (respectivement sort de) l'instrument pour le point de l'objet placé sur l'axe optique. L'ouverture conditionne le flux transmis, la qualité de l'image, la profondeur de champ. Si l'objet est à l'infini, l'ouverture est définie par le diamètre du cylindre de rayon qui entrent dans le système. Le **champ** objet correspond à la taille maximale de l'objet qui peut être imagé par le système optique. On peut définir ce champ par une unité métrique si l'objet est à distance finie ou par une unité angulaire si l'objet est à l'infini. Nous aborderons en détail tous ces aspects.

Les deux briques de base de tous les systèmes optiques sont les miroirs sphériques et les dioptries sphériques. Afin d'aborder tous ces concepts, nous allons étudier spécifiquement le dioptre sphérique, qui est à la base de toutes les lentilles (sphériques). Un dioptre est une interface entre deux milieux d'indice différent. Son étude va nous permettre de poser les bases de l'approximation paraxiale appelée communément « conditions de Gauss » ou « optique linéaire ».

2. Étude du dioptre sphérique

On considère une interface sphérique qui sépare deux milieux d'indice optique n et n' . On s'intéresse dans un premier temps à l'image A' d'un point A situé sur l'axe de révolution du dioptre (celui qui contient le centre de courbure C et le sommet S du dioptre).

Le SO sera rigoureusement stigmatique pour le couple (A, A') lorsque tous les rayons utiles (ceux qui passent par le dioptre) partants de A donnent des rayons convergents vers A' . Le principe de Fermat impose alors que la distance optique L soit constante quel que soit le rayon partant de A contenu dans l'ouverture du SO. Cette stationnarité vis-à-vis de l'ouverture implique également que l'onde sphérique divergente émise au point A devient une onde sphérique convergente en A' .



Si on appelle I le point d'impact d'un rayon sur le dioptre, alors le principe de Fermat s'écrit,

$$L = n\overline{AI} + n'\overline{IA'} = \text{Cte} \quad \forall \text{ le point } I$$

On pose $x = \overline{SH}$; $R = \overline{SC}$; $p = \overline{SA}$; $p' = \overline{SA'}$

Dans le triangle AIH on a $AI^2 = AH^2 + HI^2 = (-p + x)^2 + HI^2$

Dans le triangle A'IH on a $A'I^2 = A'H^2 + HI^2 = (-p' + x)^2 + HI^2$

Dans le triangle CHI on a $HI^2 = CI^2 - CH^2 = R^2 - (-R + x)^2$

Il vient alors,

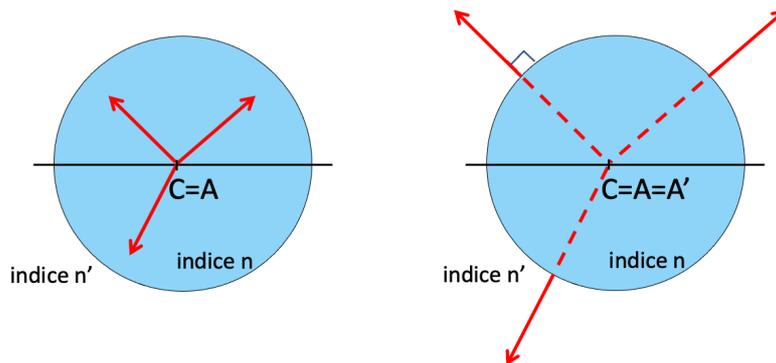
$$L = n\sqrt{(-p + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2} \pm n'\sqrt{(-p' + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2}$$

$$L = n|p| \sqrt{1 + \frac{2x}{p} \left(\frac{R}{p} - 1 \right)} \pm n'|p'| \sqrt{1 + \frac{2x}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1 \right)}$$

Remarque : signe (+) si l'image est réelle ($p' > 0$) et (-) si elle est virtuelle ($p' < 0$)

Le chemin optique dépend de l'ouverture (via x) et donc la condition de stigmatisme n'est en général pas respectée. Elle ne sera atteinte que pour trois cas particuliers.

- Si on impose $p = R = p' < 0$ alors $L = Cte$. L'objet réel, au centre de courbure, a son image virtuelle au même endroit. Un rayon, partant du centre de courbure C , incident au dioptre n'est pas dévié. Tous les rayons émergents se croisent virtuellement en C . Le centre de courbure est donc un point singulier stigmatique du dioptre sphérique.



- On linéarise le problème en supposant que x est petit devant les autres grandeurs caractéristiques du problème.
- On cherche une solution plus générale qui rend L stationnaire par rapport à x , soit,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Approximation linéaire : les conditions paraxiales

Le stigmatisme rigoureux semble rare. Il est intéressant de voir si en se plaçant dans des conditions de petites ouvertures (optique paraxiale) tout système optique ne devient pas stigmatique. C'est l'objet de l'approximation linéaire suivante où on considère que x est petit devant les autres grandeurs caractéristiques du problème. En anglais le terme « optique paraxiale » est appelé « first order optics ». Il vient,

$$L = n|p| \left(1 + \frac{x}{p} \left(\frac{R}{p} - 1 \right) \right) \pm n'|p'| \left(1 + \frac{x}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1 \right) \right)$$

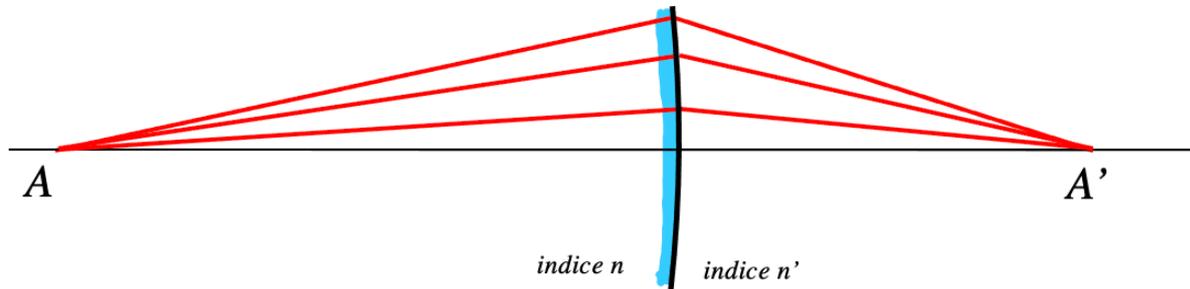
Dans notre exemple, on a $p < 0$ et $p' > 0$ donc

$$L = -np + n'p' + x \left(n - n' - R \left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} \right) \right)$$

L est indépendant de l'ouverture (quel que soit x) si,

$$n - n' - R \left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} = \frac{n - n'}{R}$$

Si p et p' obéissent à cette équation alors le chemin optique est stationnaire vis-à-vis de l'ouverture et on obtient le stigmatisme rigoureux dans le cadre des petites ouvertures. Ces conditions sont dites paraxiales (proche de l'axe) et connues comme les conditions de Gauss. Tous les rayons partants d'un point A sur l'axe convergent tous en un unique point A' sur l'axe.



Aucune approximation : les points d'Young-Weierstrass

On cherche une solution générale qui rend L stationnaire par rapport à l'ouverture (ici x). La dérivée de L par rapport à x vaut alors,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{n \frac{|p|}{p} \left(\frac{R}{p} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{2x}{p} \left(\frac{R}{p} - 1 \right)}} \pm \frac{n' \frac{|p'|}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{2x}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1 \right)}} = 0$$

Pour le cas particulier $x = 0$ on a,

$$n \frac{|p|}{p} \left(\frac{R}{p} - 1 \right) \pm n' \frac{|p'|}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1 \right) = 0$$

Donc pour tout x , on doit également avoir,

$$\frac{1}{p} \left(\frac{R}{p} - 1 \right) = \frac{1}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1 \right)$$

Ces deux relations imposent alors $n|p| \pm n'|p'| = 0$, ce qui impose la solution (-) à savoir $p' < 0$ (image virtuelle). On a donc $np = n'p'$. Ce qui au passage impose $L = 0$ comme pour le centre de courbure.

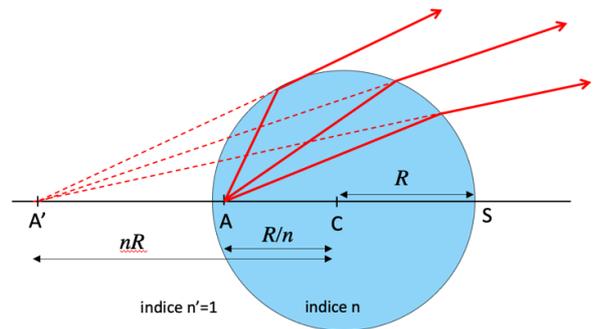
Il existe donc une solution (unique) qui annule la dérivée de L par rapport à l'ouverture quelle que soit l'ouverture, qui est,

$$p = \left(\frac{n'}{n} + 1 \right) R$$

$$p' = \left(\frac{n}{n'} + 1 \right) R$$

Ces points conjugués sont appelés **points de Young-Weierstrass**. Si l'un est réel alors l'autre est virtuel (car p et p' ont même signe). Cette conjugaison spécifique au dioptre sphérique est utilisée dans les objectifs de microscope à très grande ouverture.

En dehors de ces points, et du centre de courbure, le stigmatisme n'est plus assuré rigoureusement et des aberrations géométriques apparaissent, ce qui occasionne un étalement du point image et une potentielle perte de qualité dans l'image (nous y reviendrons).



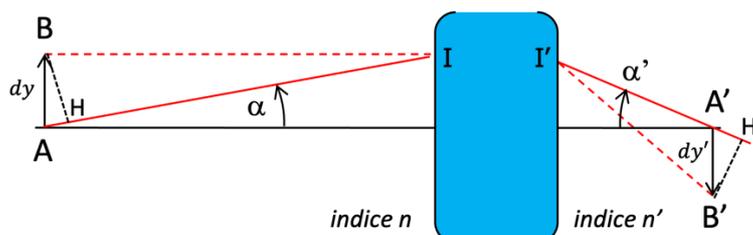
Les solutions générales du problème $L = Cte$ sont appelées ovales de Descartes et comme pour le dioptre sphérique (où la constante est nulle), le stigmatisme rigoureux est uniquement obtenu pour des couples de points. Nous avons,

- Dioptre elliptique pour la conjugaison infini-foyer (si $n < n'$)
- Dioptre hyperbolique pour la conjugaison infini-foyer (si $n > n'$)
- Miroir parabolique pour la conjugaison infini/foyer
- Miroir elliptique pour ses foyers
- Miroir hyperbolique pour ses foyers
- Centre de courbure d'un miroir sphérique
- Miroir plan pour tous les points

Stigmatisme en dehors de l'axe optique : aplanétisme

Nous avons traité le cas du point sur l'axe de symétrie du dioptre (axe optique). Faire une image c'est également s'intéresser aux points dans le champ. Pour faire l'image d'un objet étendu, il est donc nécessaire que le stigmatisme sur l'axe « survive » hors de l'axe (transversalement à l'axe dans un 1^{er} temps).

On reprend la situation précédente où notre système est considéré comme stigmatique pour un couple de points (A, A') sur l'axe et on regarde comment évolue la condition lorsque le point A s'éloigne de l'axe vers un point B d'une petite quantité dy . L'image de B est B' éloigné de dy' de A' sur l'axe.



La condition de stigmatisme doit s'appliquer aux points (B, B') ce qui impose que le chemin optique associé soit constant au même titre que (A, A') . On a donc,

$$(AA') - (BB') = Cte$$

On fait intervenir les points d'entrée (I) et de sortie (I') du SO. Comme dy est un infinitésimal, on peut faire l'hypothèse que le rayon partant de B, passant par I ressort également en I'. L'erreur commise est très faible car les distances caractéristiques dans le SO sont très inférieures en général au chemin optique en entrée et sortie. Dans le cas d'une seule surface, cette hypothèse n'est pas nécessaire. Nous avons donc,

$$(AII'A') - (BII'B') = Cte \forall (I, I')$$

Que l'on réécrit en faisant intervenir les indices et les distances géométriques,

$$nAI + (II') + n'I'A' - \{nBI + (II') + n'I'B'\} = Cte$$

Qui se simplifie,

$$n(AI - BI) + n'(I'A' - I'B') = Cte$$

Dans le cas des faibles champs la différence entre les chemins AI et BI est simplement la projection AH d'un chemin sur l'autre. Il vient alors,

$$nAH - n'A'H' = Cte$$

Que l'on peut réécrire en faisant intervenir les angles d'ouverture α et α' .

$$n \times dy \times \sin\alpha - n' \times dy' \times \sin\alpha' = Cte \forall (\alpha, \alpha')$$

Pour une ouverture nulle, la constante est forcément nulle. Donc la relation d'aplanétisme, connue sous le nom de **relation des sinus d'Abbe**, s'écrit,

$$n \cdot dy \cdot \sin\alpha = n' \cdot dy' \cdot \sin\alpha'$$

Un système optique satisfaisant cette relation, maintient son stigmatisme hors (mais proche) de l'axe. Tout système d'imagerie doit satisfaire cette relation.

Vérifions-le dans le cas du dioptré sphérique pour ses points de Weierstrass.

Nous savons que $n\overline{AI} + n'\overline{IA'} = 0$

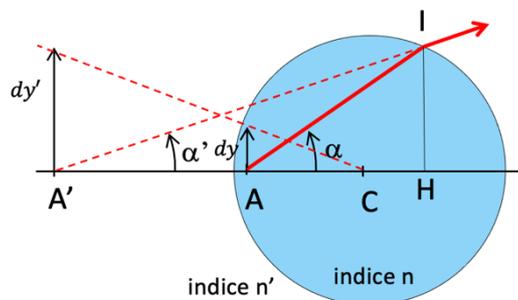
Nous avons $\sin\alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}}$ et $\sin\alpha' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'I}}$

ce qui donne $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\overline{AI}}{\overline{A'I}} = \frac{n'}{n}$ (#1)

Le grandissement de la conjugaison s'écrit

$$g_y = \frac{dy'}{dy} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \text{ (#2)}$$

En effet on a $\overline{CA} = \overline{CS} + \overline{SA} = -R + \left(\frac{n'}{n} + 1\right)R = \frac{n'}{n}R$ et $\overline{CA'} = \frac{n}{n'}R$

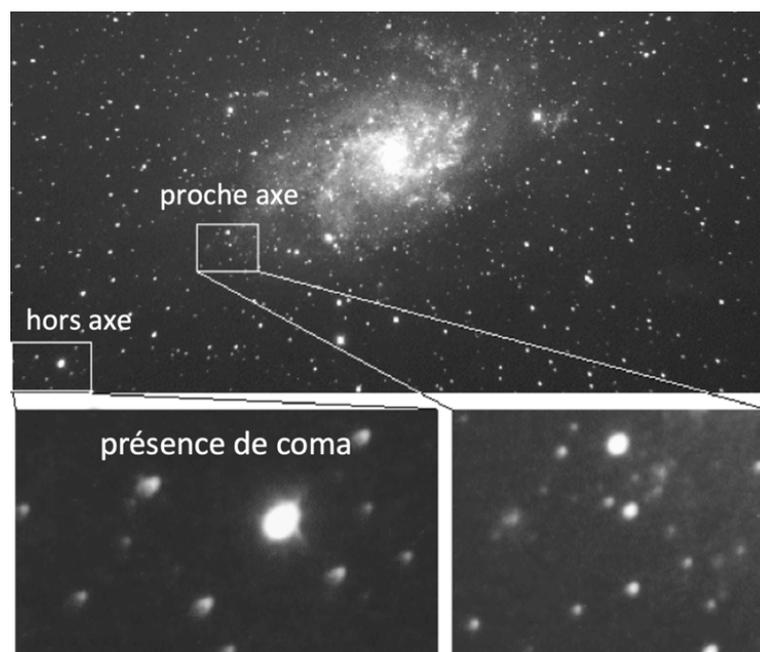


Les deux relations précédentes (#1 et #2) nous permettent de retrouver la condition d'aplanétisme, ce qui prouve que les points de Weierstrass gardent leur stigmatisme pour des petits champs.

En fait la relation d'Abbe impose (équation #1 ci-dessus) que $\frac{\overline{AI}}{A'I} = Cte$. Ceci n'est donc satisfait que si le point I est sur une sphère. Donc tout dioptré non sphérique ne la vérifie pas. Les autres conjugaisons énoncées plus haut qui était stigmatique pour un couple de points particuliers ne sont donc pas aplanétiques. Il est très difficile d'assurer le stigmatisme pour des grandes ouvertures et dans le champ. En dehors des conjugaisons très particulières l'image d'un point sera toujours une tache, même pour des lentilles à forme sphérique ou une lame à faces parallèles, optiques d'usage très courant dans les systèmes optiques complexes.

Illustration : non-aplanatisme du miroir parabolique

Pour illustrer le non-aplanatisme de la parabole, on peut voir sur le cliché suivant, obtenu avec un télescope de Newton (association d'un miroir parabolique et d'un miroir plan disposé à 45° pour dégager l'image), l'étalement de la tache image des étoiles (en forme d'aigrette) pour celles situées hors de l'axe optique (confondu avec le centre de la galaxie). Ce défaut s'appelle une aberration de coma. Il existe des correcteurs de coma pour supprimer ce défaut classique de ces configurations.

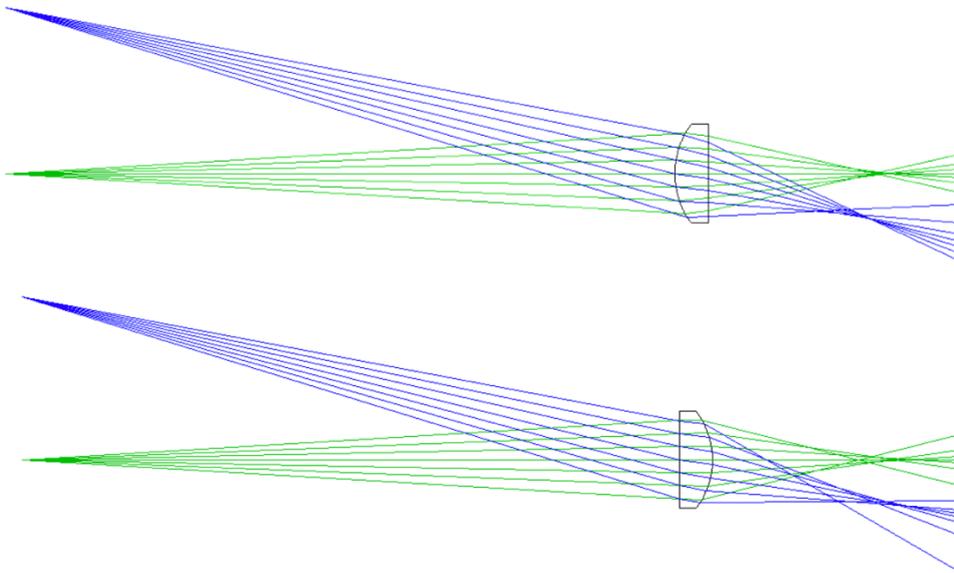


La galaxie M33 prise au télescope de Newton. Crédit : Serge Bertello

Illustration : non-stigmatisme de la lentille plan-convexe

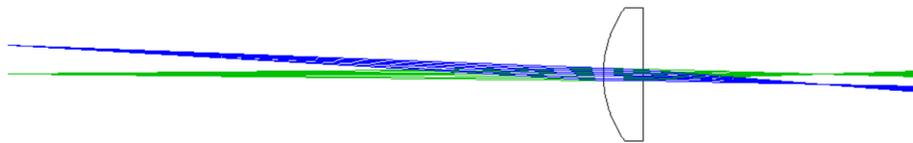
Dans le cas d'un simple lentille plan-convexe le non-stigmatisme apparaît déjà sur l'axe. Ci-dessous le tracé de rayons exacte à travers une lentille plan-convexe pour un point sur l'axe (rayons verts) et pour un point hors de l'axe (rayons bleus). On voit effectivement que les rayons sur l'axe (respectivement hors axe) ne convergent pas au même endroit sur l'axe (respectivement hors axe). L'étalement de la tache pour le point sur l'axe se nomme aberration sphérique. Hors axe l'étalement fait en plus intervenir des aberrations de coma, de l'astigmatisme et de la courbure. Si on retourne la lentille, en disposant sa face plane côté objet, le défaut est encore plus important. On pourra retenir ce proverbe bien connu des

opticiens : « plus plat plus prêt » qui signifie qu'il faut mettre la face la moins courbée de la lentille du côté où le plan conjugué (objet ou image) est le plus prêt.



La devise de l'opticien « plus plat plus prêt ».

En revanche dès qu'on se place dans des conditions paraxiales (petite ouverture et petit champ) on retrouve une conjugaison stigmatique en vertu de l'approximation linéaire. L'image d'un point est un point et l'image d'un plan est un plan. Bien évidemment dans ces conditions le flux collecté est moins grand et peut nuire à la détection.

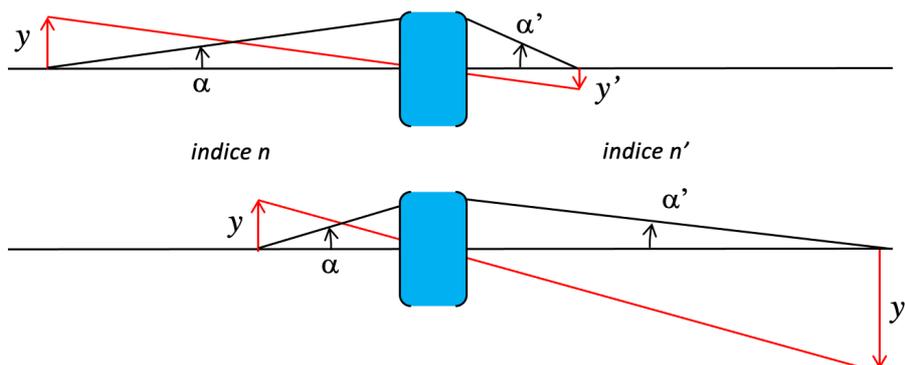


Les conditions paraxiales pour la lentille plan-convexe.

Relation de Lagrange-Helmholtz

Dans le cadre de l'approximation paraxiale (ou linéaire), la relation d'aplanétisme se linéarise et se nomme communément la relation de Lagrange-Helmholtz. Elle s'écrit,

$$n \times y \times \alpha = n' \times y' \times \alpha'$$



Cette relation dit simplement que le produit indice, extension transversale et ouverture est un invariant du système optique. Il se conserve donc à sa traversée. Il dit également qu'on ne peut pas obtenir un fort grandissement (y'/y) grand et une ouverture image grande. Autrement dit, plus l'image s'éloigne (plus sa taille augmente) plus l'ouverture diminue.

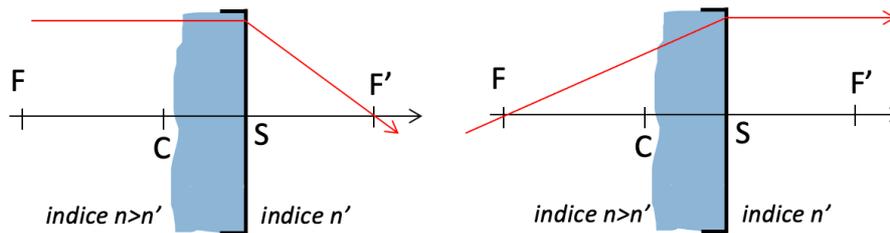
Ces conditions vont nous amener à définir correctement les paramètres pertinents d'un système optique, comme sa distance focale et permettre de construire simplement la marche des rayons. L'optique paraxiale doit être vue comme la 1^{ère} étape lors de la conception d'un système optique.

3. Distances focales, plans principaux et points nodaux dans un système centré

Revenons au dioptre sphérique convergent (verre-air par exemple), où nous avons mis en évidence une relation de conjugaison entre un point objet et un point image,

$$\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} = \frac{n - n'}{R}$$

Avec, $p = \overline{SA}$, $p' = \overline{SA'}$ et $R = \overline{SC}$.



Si l'objet est à l'infini, l'image se forme en un plan particulier, appelé **plan focal image**, en **F'**, **foyer image** du dioptre, tel que,

$$p' = \frac{-n'}{n - n'} \overline{SC} = f' = \overline{SF'}$$

Pour obtenir une image à l'infini, l'objet sera placé sur au **foyer objet F** à la distance,

$$p = \frac{n}{n - n'} \overline{SC} = f = \overline{SF}$$

Ces deux situations définissent les **distances focales objet** $f = \overline{SF}$ et **image** $f' = \overline{SF'}$. Elles sont simplement liées par les indices,

$$-\frac{f}{n} = +\frac{f'}{n'}$$

Par exemple, dans le cas d'un dioptre verre-air convergent, l'indice du verre vaut environ 1,5 et la distance focale image $f' = 1,5|f|$.

Si la distance focale image est positive, le dioptre est dit **convergent**. Si cette distance est négative le dioptre est dit **divergent**.

On voit que la distance focale est ici la distance entre F' et un plan situé à l'intersection du rayon incident parallèle (ici ce plan est tangent au sommet S) et de son émergent qui passe par F' . En optique paraxiale, ce plan passe, dans le cas du dioptre (et également dans le cas de la lentille mince), par son sommet.

Que devient alors la distance focale pour un système optique plus complexe, c'est à dire composé de plusieurs éléments, tels que des dioptres et des miroirs ?

On appelle **système centré**, un système composé d'une succession de dioptres/miroirs ayant un axe de symétrie commun.

Dans le cadre de l'optique paraxiale, A' est l'image de A , alors

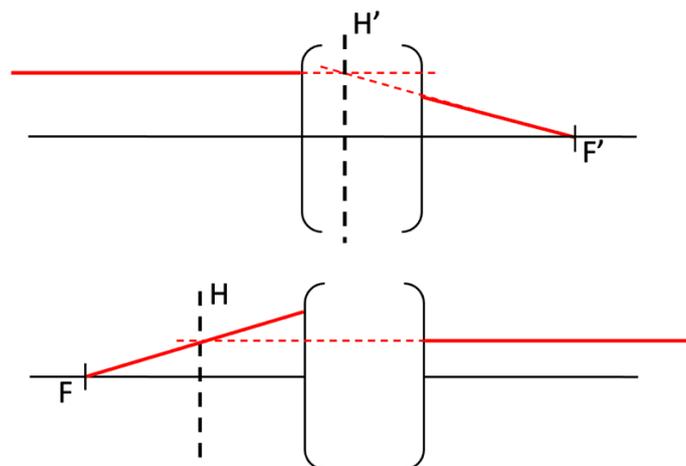
- Deux points A et A' sont dit conjugués par le système optique. On note $A \rightarrow A'$
- L'image est unique et géométriquement stigmatique
- Le plan objet et le plan image sont conjugués.
- Pour un plan objet, la position et la taille de l'image sont imposées par la conjugaison
- Des points particuliers, appelés **points cardinaux** (foyers, plans principaux et points nodaux), définissent entièrement le système optique. Ils permettent de tracer la marche des rayons et déterminer la position et la grandeur des images.

On appelle **foyer objet F** tout conjugué d'un point image à l'infini sur l'axe.

On appelle **foyer image F'** tout conjugué d'un point objet à l'infini sur l'axe.

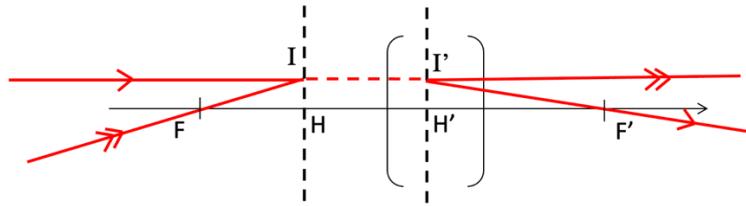
On appelle **plan principal image H'** , le plan orthogonal à l'axe passant par l'intersection du rayon incident parallèle à l'axe et l'émergent passant par F' .

On appelle **plan principal objet H** , le plan orthogonal à l'axe passant par l'intersection du rayon incident passant par F et émergent parallèle à l'axe.



Si on choisit un rayon quelconque (rayon double flèche sur le schéma ci-après) passant par F et passant par I le point d'intersection entre le rayon incident parallèle à l'axe et le plan H , on voit immédiatement que ces deux rayons (donnent deux rayons) émergents ensemble du point I' dans le plan H' et à même hauteur que le point précédent. Cela démontre que H et H' sont des plans conjugués par le système avec un grandissement transversal $+1$ ($\overline{HI} = \overline{H'I'}$). Si l'objet est en H alors son image est en H' et de même taille.

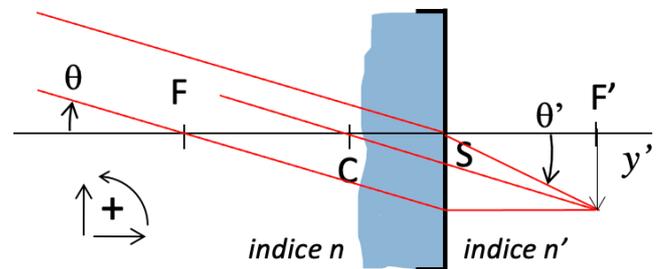
Remarque : dans cet exemple, H est avant H' mais cela peut être l'inverse.



Dans une lentille mince, les plans principaux sont confondus avec le plan de la lentille. Dans le dioptre (et le miroir) les plans principaux sont confondus avec leur sommet. La distance focale objet (respectivement image) est la distance entre le plan principal objet (respectivement image) et le foyer objet (respectivement image).

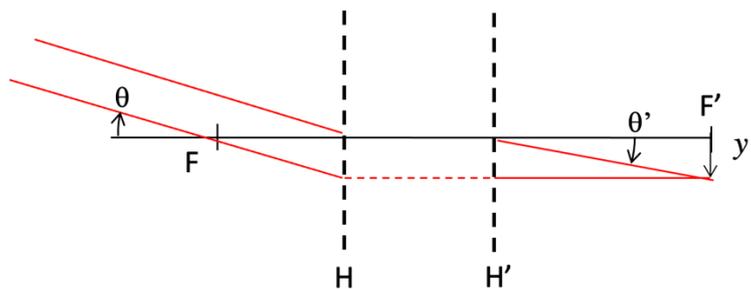
Prenons un point objet à l'infini hors axe dans le cas du dioptre. On a $y' = f' \times \theta' = -f \times \theta$. Pour le rayon passant par le sommet, on a de plus $n\theta = n'\theta'$ ce qui démontre à nouveau la relation entre les distances focales objet et image,

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$



Dans le cas plus général d'un système centré, la construction suivante, montrent de manière claire que,

$$y' = \overline{H'F'} \times \theta' = -\overline{HF} \times \theta$$



Par analogie avec le dioptre, la distance focale objet (image) est donc la distance algébrique entre le plan principal objet (image) et le foyer objet (image).

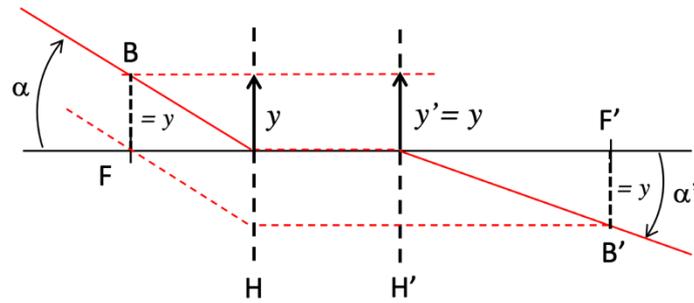
$$f = \overline{HF} ; f' = \overline{H'F'}$$

En utilisant la relation de Lagrange-Helmholtz ($ny\alpha = n'y'\alpha'$) sur les plans principaux on a, d'après le schéma ci-dessous,

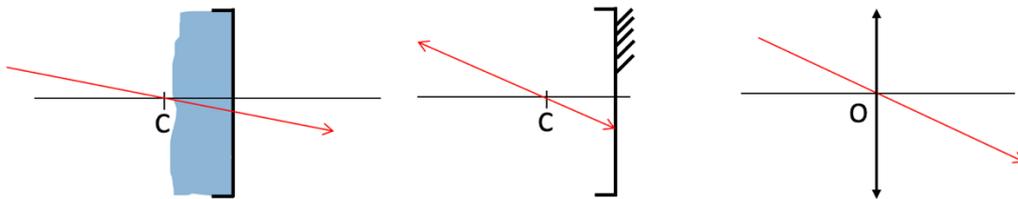
$$n\alpha = n'\alpha'$$

En faisant intervenir les distances focales dans les triangles HFB et HF'B',

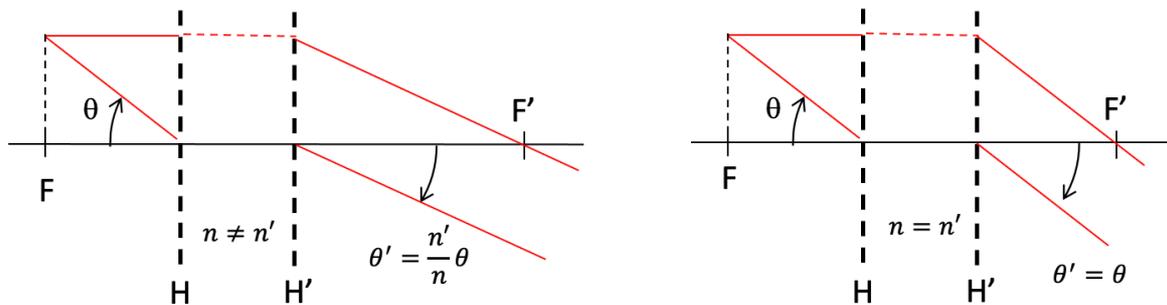
$$n\frac{y}{f} = n'\frac{y'}{-f'} \quad \rightarrow \quad \frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$



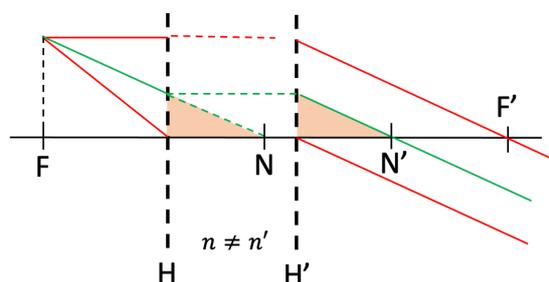
On peut se demander maintenant s'il existe un point particulier du système centré pour lequel un rayon objet passant par ce point faisant un angle θ avec l'axe donnerait un rayon image faisant le même angle avec l'axe, comme le centre de courbure d'un dioptre/miroir ou le centre optique d'une lentille mince.



Dans un système centré quelconque de distance focale objet et image différente ($n \neq n'$), le rayon passant le point sur l'axe du plan principal objet H ne ressort pas avec le même angle sur le point sur l'axe du plan principal image H'. Si l'indice d'entrée et sortie sont identiques alors le rayon n'est effectivement pas dévié (angulairement) et l'intersection des plans principaux avec l'axe jouent donc le rôle de points singuliers (comme le centre optique d'une lentille).



Dans le cas général (ci-dessous), on peut trouver en partant du schéma ci-dessus à gauche, un rayon (vert) passant par un point sur l'axe (ici en N) qui ressort non dévié (angulairement) en N'. Les points sur l'axe N et N' sont appelés **points nodaux** objet et image.



En utilisant les triangles semblables, on a de plus l'égalité suivante : $\overline{NN'} = \overline{HH'}$. Cette distance se nomme « **interstice** » du système optique.

Remarque : Ils existent également des plans anti-principaux et des points anti-nodaux mais leur usage n'est pas courant donc évitons d'en parler.

Un système centré sera dit « **minces** » si ses distances caractéristiques $\overline{NN'}$, $\overline{HH'}$ sont petites devant les distances caractéristiques de la conjugaison \overline{HA} , $\overline{H'A'}$, f , f' .

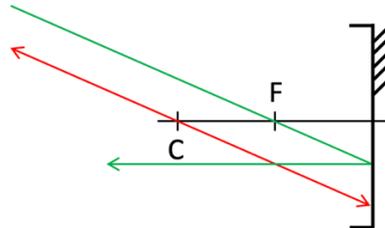
Remarques :

- *Dans la lentille mince dans un milieu donné, les plans principaux et les points nodaux sont confondus avec le plan de la lentille.*
- *Dans un miroir sphérique, les plans principaux sont confondus avec la surface du miroir et ses points nodaux sont confondus avec le centre de courbure. Les foyers objet et image sont également confondus et situés à mi-distance du rayon de courbure. En effet d'après la formule du dioptre qui relie indice et rayon de courbure,*

$$\overline{SF'} = \frac{-n'}{n - n'} \overline{SC}$$

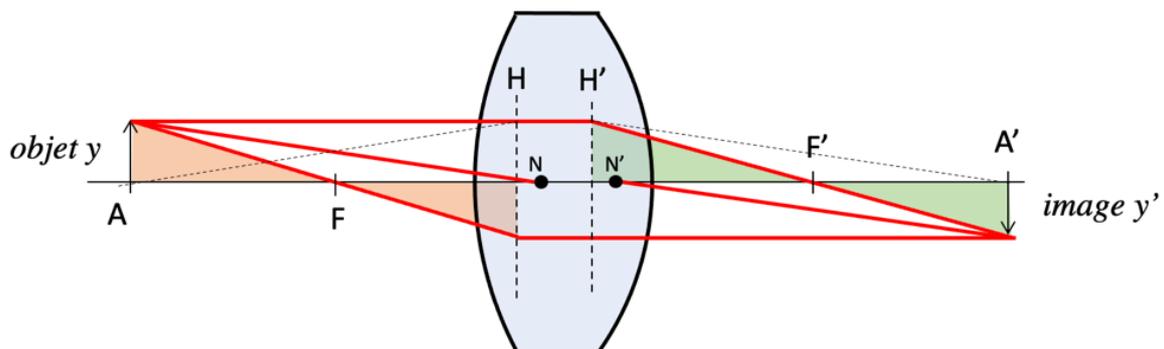
Dans un miroir l'indice de sortie est l'opposé de l'indice d'entrée car le rayon est réfléchi. On a donc,

$$\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF}$$



4. Conjugaison à distances finies

C'est la plus connue mais pas forcément la plus usuelle. Les positions de l'objet et de son image sont reliées à la distance focale par la formule de conjugaison. La taille de l'image dépend de cette conjugaison (c'est anodin à dire mais très important à retenir).



Les formules de conjugaison aux plans principaux et aux foyers s'écrivent,

$$-\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n'}{\overline{H'A'}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{\overline{HF}}$$

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = f \times f'$$

En utilisant les triangles semblables (orange et vert sur la figure), la relation de Lagrange-Helmoltz (trait noir pointillé) et le rayon passant par N,N', on retrouve les formules du grandissement transversal

$$g_y = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{N'A'}}{\overline{NA}}$$

Un objectif photographique en usage traditionnel travaille dans un régime de grandissement inférieur à 1 (objet loin). Un objectif dédié à la macrophotographie travaille usuellement avec un grandissement de 1 ou 0,5 (petit objet à 2 ou 3 fois la distance focale). Un objectif de microscope travaille avec un fort grandissement (objet très proche du foyer).

En différentiant la formule de conjugaison aux plans principaux, on détermine le grandissement longitudinal (applicable uniquement pour des petits déplacements) pour une conjugaison de grandissement transversal donné,

$$n \frac{d\overline{HA}}{\overline{HA}^2} - n' \frac{d\overline{H'A'}}{\overline{H'A'}^2} = 0 \leftrightarrow \frac{d\overline{H'A'}}{d\overline{HA}} = \frac{n}{n'} \times \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}\right)^2$$

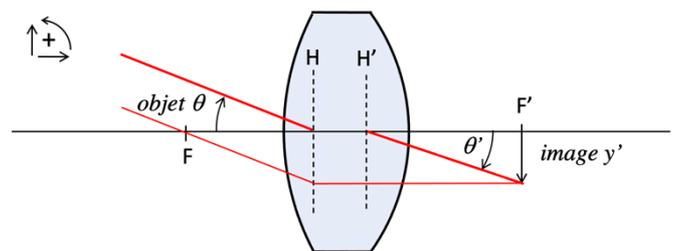
$$g_z = \frac{n'}{n} g_y^2$$

Le grandissement longitudinal est toujours positif. Si l'objet se déplace vers la gauche alors son image se déplace également vers la gauche.

5. Conjugaison infini-foyer et foyer-infini

Lorsque l'objet est situé à l'infini, on le caractérise par l'angle θ sous lequel il est perçu de l'instrument. La taille de l'image, placée au foyer image F' , a pour expression,

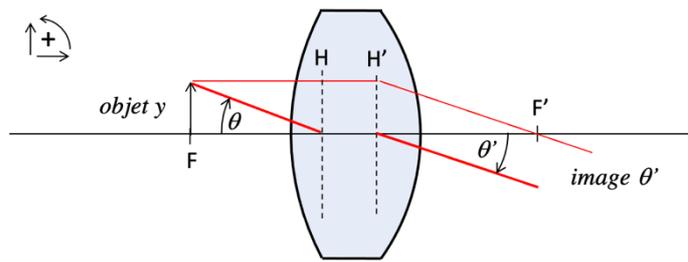
$$y' = -f \times \theta = f' \times \theta'$$



Remarque : Le miroir primaire d'un télescope travaille dans cette conjugaison. L'œil au repos et sans défaut est aussi dans cette situation.

Inversement quand l'objet de taille y est placé au foyer objet d'un système, son image est rejetée à l'infini de taille angulaire,

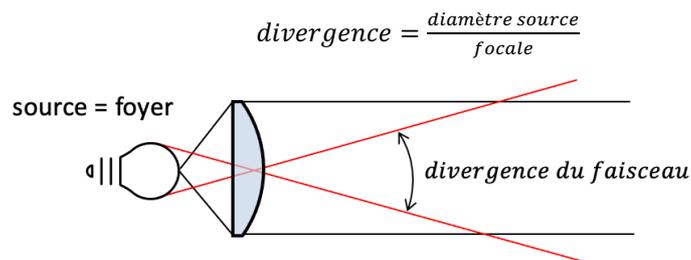
$$\theta' = \frac{n'}{n} \theta = -\frac{n' y}{n f} = -\frac{y}{f'}$$



Remarque : Un oculaire dans un microscope ou télescope, une loupe, un collimateur travaillent dans cette conjugaison.

Exemple d'instrumentation

La collimation est l'action de minimiser la divergence des rayons provenant d'une source. Elle est obtenue en plaçant la source au foyer d'un système optique (son image est donc rejetée à l'infini). En revanche la divergence ne sera jamais nulle même pour une source ponctuelle en raison du phénomène de diffraction. Pour parvenir à une collimation idéale, il faut réduire la taille de la source (éventuellement en la diaphragmant) ou augmenter la distance focale du système optique, mais ce sera toujours au détriment d'une perte de flux transmis.



D'autres grandeurs équivalentes sont parfois utilisées bien qu'elles n'apportent pas plus d'information que la focale.

On appelle **puissance intrinsèque** le rapport indice sur distance focale. Elle s'exprime en m^{-1} ou en dioptries (parfois noté δ),

$$P = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

Dans le cas de l'œil, la focale objet vaut environ 16,7 mm (formule du dioptre pour $n'=1,33$) ce qui donne une puissance de 60δ .

On appelle **grossissement commercial** le rapport entre l'angle θ' sous lequel est vu l'image de l'objet (de taille y) à travers l'instrument et l'angle θ_{250} sous lequel serait vu l'objet s'il était placé à 250 mm de l'œil sans instrument. Cette grandeur est exprimé en m^{-1} . Ce qui donne,

$$G_c = \frac{\theta'}{\theta_{250}} = \frac{y/f'}{y/0,25} = \frac{1}{4f'} = \frac{P}{4}$$

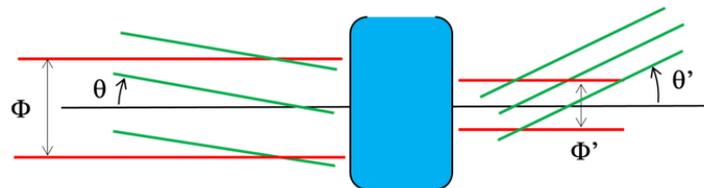
*Remarque : Cette grandeur est inscrite sur les oculaires et les loupes de poche. La distance de 250 mm correspond à la distance minimale d'approche d'un objet (appelé *punctum proximus*) vu net par un œil emmétrope (sans défaut) d'un sujet d'âge moyen (autour de 40 ans). Le grossissement commercial correspond donc bien au gain apporté pour voir un petit objet qu'on placerait naturellement à *punctum proximus*.*



6. Conjugaison infini-infini – système afocal

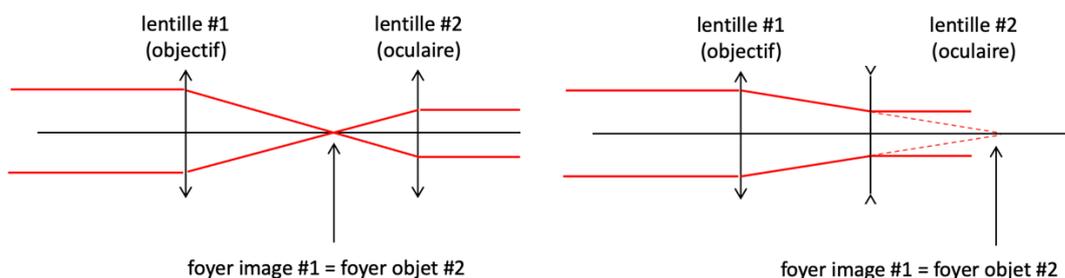
Dans un système afocal (ce qui veut dire « sans foyers »), si l'objet est à l'infini, son image l'est aussi. Le grandissement est angulaire. On parle de **grossissement** G . Il est défini comme le rapport entre l'angle sous lequel est vu l'image et l'angle sous lequel est vu l'objet. En vertu de la relation de Lagrange-Helmoltz ce grossissement est inversement proportionnel au grandissement transversal. On notera que ce dernier est constant quelle que soit la position de l'objet contrairement à un système focal.

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\phi}{\phi'}$$



Exemple d'instrumentation

Une lunette pour l'observation astronomique est un système afocal. Dans une moindre mesure, la jumelle d'observation terrestre l'est également. Le système optique est l'association d'un objectif qui forme l'image d'un objet lointain dans son plan focal. L'image intermédiaire formée est placée au foyer objet d'un oculaire qui rejette à nouveau son image à l'infini pour que l'œil puisse l'observer sans accommodation. La taille apparente de l'image ainsi formée est augmentée.



Lunette afocale de type « Kepler » (gauche) et de type « Galilée » (droite)

L'objectif formera l'image d'un objet à l'infini, de taille apparente θ à son foyer et aura une taille $y' = f'_{\text{objectif}} \times \theta$. Cette image sera ensuite imagée à l'infini par l'oculaire avec une taille apparente $\theta' = \frac{y'}{f'_{\text{oculaire}}} = \frac{f'_{\text{objectif}}}{f'_{\text{oculaire}}} \times \theta$. Le grossissement de la lunette $G = \theta' / \theta$ est donc simplement le rapport de la focale de l'objectif et de l'oculaire. Pour obtenir un

grossissement important il faut donc que la focale de l'objectif soit plus grande que celle de l'oculaire.

Dans une paire de jumelles la distance entre l'objectif et l'oculaire peut varier pour observer des objets proches. La jumelle n'est plus tout à fait afocale. Mais l'usage fait que c'est bien le grossissement est la grandeur inscrite sur le corps d'une paire de jumelles.



Jumelles de grossissement 10.

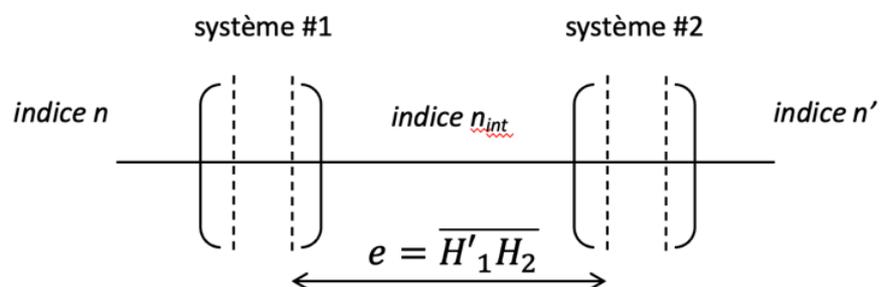
7. Association de deux systèmes centrés

La puissance de l'association de deux systèmes centrés non accolés de puissance connue est déterminée par la **formule de Gullstrand**,

$$P = \frac{n'}{f'} = P_1 + P_2 - \frac{e}{n_{int}} \times P_1 \times P_2$$

Si les deux systèmes sont minces et dans le même milieu, la formule de Gullstrand se simplifie,

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 \times f'_2}$$



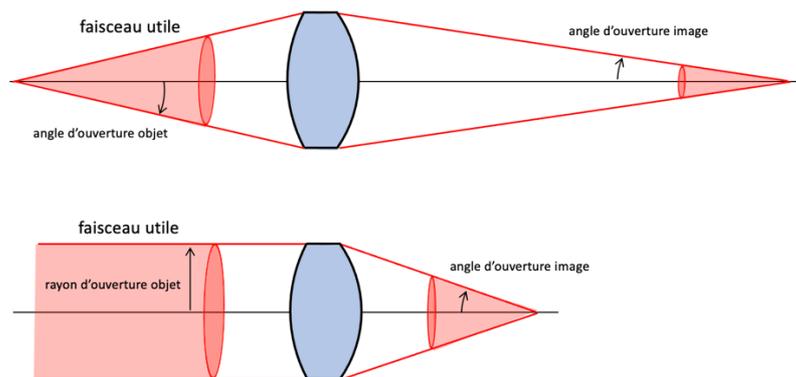
B. Limitations des faisceaux

Un système optique est constitué d'éléments ayant une taille finie. De fait, cela limitera l'étendue des faisceaux utiles qui traversent l'instrument jusqu'au capteur. Cette limitation aura deux conséquences que nous allons étudier en détail, à savoir,

- Une limitation de l'ouverture
- Une limitation du champ

Ces limitations géométriques auront un impact sur la qualité de l'image et sur la quantité de lumière dans l'image. Nous aborderons également ces points par la suite.

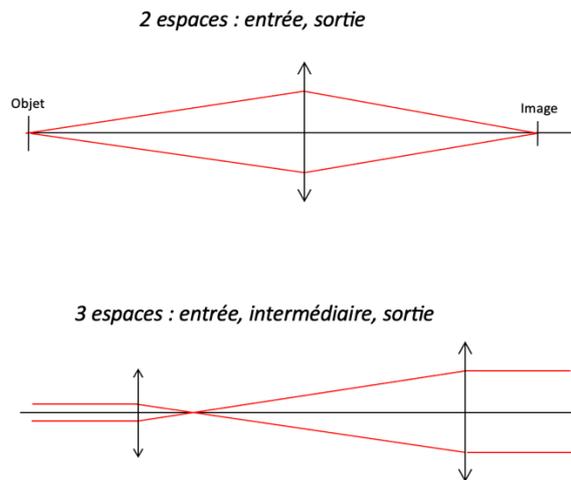
Le **faisceau utile** est le faisceau de plus grande étendue, c'est-à-dire le plus ouvert, qui traverse tous les diaphragmes matériels (diaphragme, bord de lentilles/miroirs, pupille de l'œil). Les instruments étant centrés, les faisceaux ont soit des formes coniques ou cylindriques dans le cas de l'infini. L'angle d'ouverture objet/image correspond à l'angle du rayon le plus incliné qui entre dans / sort de l'instrument pour le point de l'objet placé sur l'axe optique. Dans le cas d'un objet/image à l'infini, l'ouverture est définie par la distance à l'axe optique du rayon parallèle le plus éloigné. Dans le cas d'une simple lentille, il est facile de définir les grandeurs d'ouverture.



Dans le cas d'un système composé de plus de deux éléments, il convient de préciser la définition d'ouverture, car le premier élément n'est pas forcément celui qui la limite. Avant de bien définir l'ouverture, il convient d'introduire la notion d'espace.

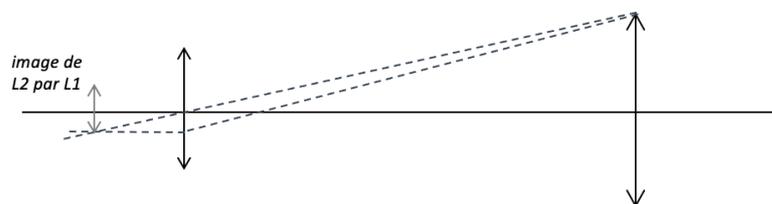
1. Notion d'espace

Considérons un système optique composé de plusieurs lentilles (centrées). Un rayon délimité par deux lentilles (dioptries) consécutives est alors défini dans un **espace**. Un diaphragme ne définit pas un espace car il ne dévie pas les rayons. Dans un espace défini, les rayons ne sont jamais déviés. Les lentilles appartenant à cet espace deviennent de simples diaphragmes (pour ce rayon).

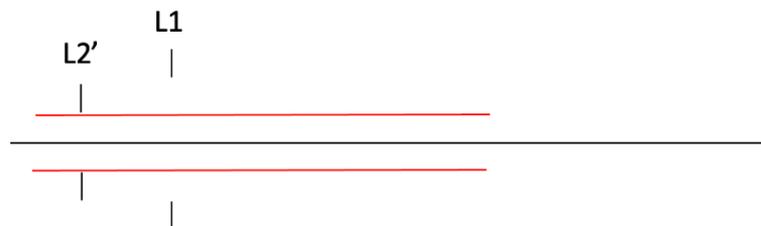


Pour étudier le système dans un unique espace, les éléments (lentilles, diaphragme) n'y appartenant pas doivent y être ramenés par conjugaison à travers les éléments dioptriques/réfléctifs disposés entre l'élément en question et l'espace défini.

Prenons l'exemple de la lunette afocale ci-dessus et choisissons de travailler dans l'espace d'entrée. La première lentille L1 y appartient mais pas la deuxième L2. Donc il faut ramener L2 en faisant son image L2' par L1 (la lumière change de sens de propagation pour dire cela - on pourrait dire également : trouver l'objet qui à travers L1 donne comme image L2 si on ne veut pas changer le sens usuel gauche-droite).



Dans l'espace d'entrée, la lunette afocale est donc complètement équivalente à deux diaphragmes où les rayons provenant d'un même point sont parallèles entre eux (car dans cet espace l'objet est à l'infini). On voit clairement ici que L2 est l'élément qui limite l'ouverture du faisceau utile car son diamètre est plus petit que L1 (dans l'espace d'entrée).



Remarque : De façon équivalente, on peut représenter la lunette dans l'espace intermédiaire et dans l'espace de sortie.

2. Notion de pupille

L'élément physique dans un système optique (lentille, miroir, diaphragme) qui limite l'ouverture des rayons pour un point objet sur l'axe s'appelle le **diaphragme d'ouverture**. Le terme **pupille du système** est également utilisé (en anglais, **aperture stop**). Elle est unique.

Si cette pupille appartient à l'espace objet (espace d'entrée) elle devient **pupille d'entrée** notée PE. Si cette pupille appartient à l'espace image (espace de sortie) elle devient **pupille de sortie** notée PS.

Si cette pupille n'est pas dans l'espace d'entrée (respectivement, dans l'espace de sortie) de l'instrument, on définit toujours une **pupille d'entrée** (respectivement, une **pupille de sortie**) qui est l'image du diaphragme d'ouverture par les éléments qui le précèdent (respectivement, qui le suivent). La pupille d'entrée et la pupille de sortie sont donc conjuguées par tout le système optique.

$$PE \xrightarrow{\text{s.o.}} PS$$

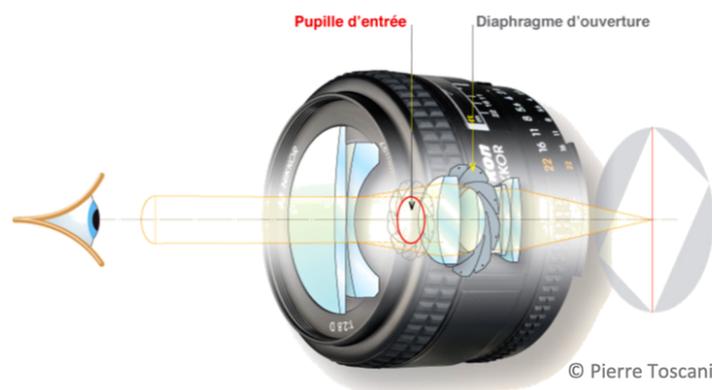
Attention ce n'est pas la même conjugaison que celle qui lit l'objet et l'image. Le grandissement est différent.

$$A \xrightarrow{\text{s.o.}} A'$$

Donc dans un système centré, Il y a autant de pupilles que d'espaces, mais une seule est le diaphragme d'ouverture. **Dans un espace donné la pupille est l'élément, ou l'image ou l'antécédent d'un élément, vu sous le plus petit angle du point sur l'axe de l'image associée.** Pour déterminer la pupille il peut être judicieux de traiter le système dans un de ses espaces (celui par exemple qui demande le moins de conjugaisons pour ramener tous les éléments dans cet espace).

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\#1} & A_1 & \xrightarrow{\#2} & A_2 & \xrightarrow{\dots} & A_{n-1} & \xrightarrow{\#n} & A' \\ PE & \xrightarrow{\#1} & P_1 & \xrightarrow{\#2} & P_2 & \xrightarrow{\dots} & P_{n-1} & \xrightarrow{\#n} & PS \end{array}$$

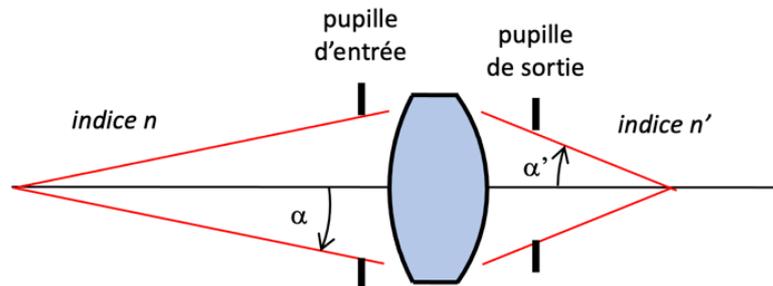
Remarque : Dans une paire de jumelles, l'ouverture est définie généralement par l'objectif (1^{ère} lentille). Dans un grand télescope, l'ouverture est définie par le diamètre du miroir primaire. Dans un objectif photographique, l'ouverture est définie par le diaphragme à lamelles situé à l'intérieur du corps métallique. En particulier regarder le diaphragme d'un objectif photographique par sa face d'entrée c'est regarder la pupille d'entrée.



3. Ouverture Numérique et Nombre d'Ouverture

La notion de pupille permet de définir deux grandeurs très importantes dans un système optique, l'ouverture numérique ON et le nombre d'ouverture N. Nous verrons que les deux sont liés en conjugaison infini-foyer pour un système aplanétique.

L'**ouverture numérique** est définie dans un espace donné. Dans l'espace objet c'est le produit de l'indice du milieu correspondant et du sinus de l'angle d'ouverture qui s'appuie entre l'axe optique et le rayon partant de l'objet sur l'axe et le bord de la pupille d'entrée. Dans l'espace image c'est le produit de l'indice du milieu correspondant et du sinus de l'angle d'ouverture qui s'appuie entre l'axe optique et le rayon partant du bord de la pupille de sortie et le point image sur l'axe.



$$ON_{\text{objet}} = n \times \sin \alpha \quad ; \quad ON_{\text{image}} = n' \times \sin \alpha'$$



Remarque : Dans un objectif de microscope la conjugaison objet-image est contrainte par le tube du microscope. L'objet est donc positionné à une distance frontale fixe et la qualité (liée à l'ouverture) est optimisée pour cette conjugaison. L'ouverture numérique objet est fixe et est donc inscrite sur le corps de l'objectif : $ON_{\text{objet}} = 0,10$ sur l'image.

On remarquera que l'ouverture numérique est directement présente dans la relation d'aplanétisme vue plus haut (relation des sinus d'Abbe).

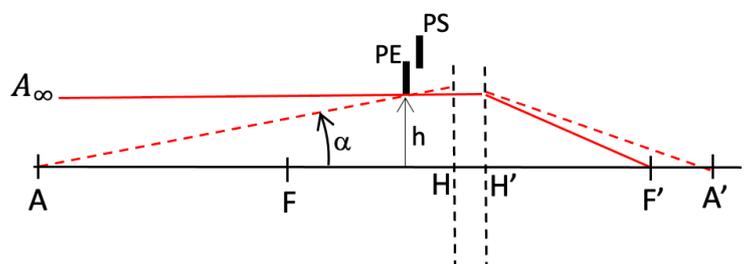
$$n dy \sin \alpha = n' dy' \sin \alpha'$$

Cette expression peut se réécrire en faisant intervenir le grandissement transversal,

$$ON_{\text{objet}} = g_y \times ON_{\text{image}}$$

Dans le cas particulier de la conjugaison infini-foyer,

Lorsque le point sur l'axe tend vers l'infini, l'angle d'ouverture objet tend vers h/HA (h = rayon pupillaire, HA distance objet-SO) et le grandissement ($H'A'/HA$) tend vers f'/HA . La relation d'aplanétisme s'écrit alors,



$$\frac{h}{HA} = \frac{f'}{HA} \times ON_{image}$$

Soit la relation spécifique à la conjugaison infini-foyer,

$$ON_{image} = \frac{h}{f'} = \frac{1}{2N}$$

Où N est appelé **nombre d'ouverture**. C'est le rapport entre la distance focale image f' et le diamètre de la pupille d'entrée du système optique. Il est uniquement défini dans l'espace objet pour un système en conjugaison infini-foyer.

$$N = \frac{\text{distance focale image}}{\text{diamètre pupille d'entrée}}$$

On dit qu'un objectif est « ouvert à f sur N ». Le terme anglais est justement « f-number », qu'on peut voir écrire directement F2.8 pour $N=2,8$.

Remarque : Un objectif photographique « ouvert à $f/2$ » est un objectif pour lequel $N=2$ (longueur focale deux fois plus grande que le diamètre de la pupille d'entrée). Cette grandeur est souvent inscrite sur les objectifs (ou accessible dans les menus de l'appareil). Plus le nombre d'ouverture est grand et plus l'objectif est fermé.

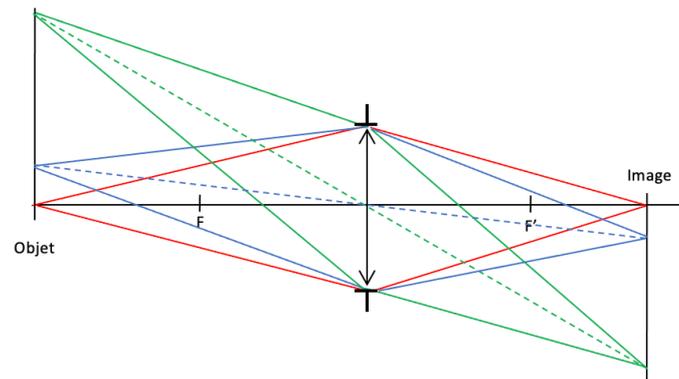
Objectif ouvert à son maximum (ici $N=1.4$)



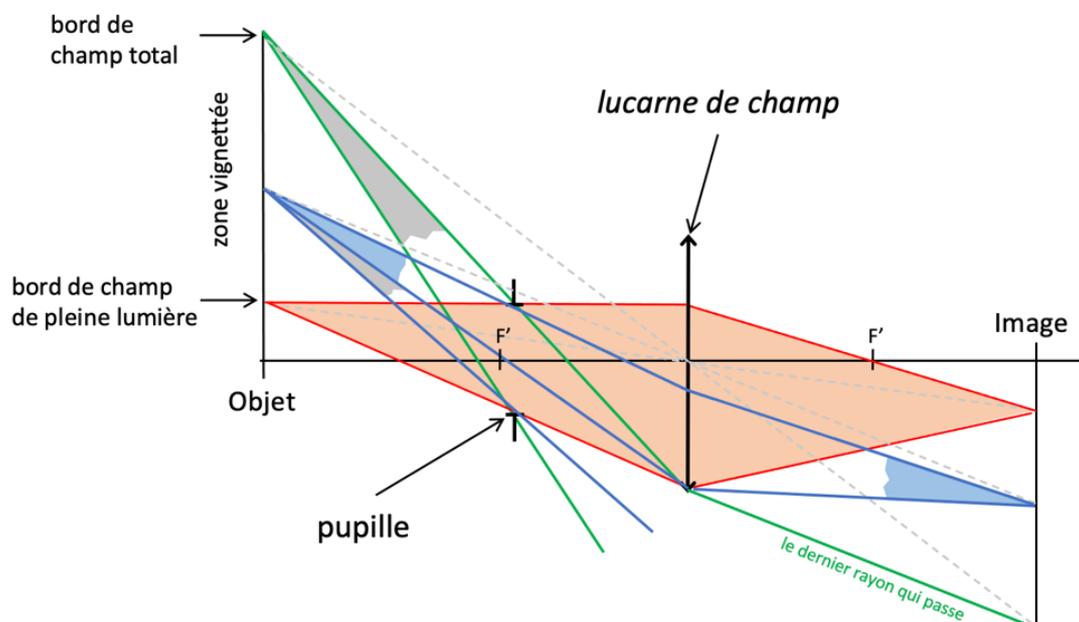
4. Champ transversal – notion de lucarne

Le **champ transversal** à l'axe optique (en anglais, field of view, FOV) correspond à l'ensemble des points de la scène (orthogonale à l'axe optique) imagée à travers le système optique. Il peut s'exprimer par des dimensions au niveau de la scène (ou de l'image), si celle-ci est à distance finie ou par des angles si elle est à l'infini. On parle de champ objet ou de champ image. On peut distinguer le **champ limité par l'optique**, défini par les éléments du système optique, et le **champ limité par le capteur**. Le plus petit des deux fixera le champ de tout l'instrument (optique + capteur). Bien évidemment il faudra souvent adapter l'un à l'autre. Un champ optique plus petit que le champ capteur c'est du capteur perdu. Un champ optique plus grand que le capteur, c'est un système optique plus grand en diamètre donc plus coûteux.

Dans le cas très particulier d'une simple lentille mince (celle-ci est la pupille) le champ n'est en principe pas limité (voir figure ci-dessous). Bien évidemment si le champ « sort » des conditions de Gauss la qualité de l'image sera très vite dégradée donc inutilisable !



Les limitations géométriques du champ commencent dès que le système possède plus qu'un élément. Le champ sera donc toujours limité par au moins deux éléments qu'on appelle **lucarnes de champ**. Il existe plusieurs zones dans le champ que nous allons définir.



Si les rayons partant d'un point objet dans le champ et s'appuyant sur les bords de la pupille d'entrée traversent tout le système alors ce point appartient au **champ de pleine lumière**. Autrement dit, dans le champ de pleine lumière la quantité de lumière reçue dans le plan image est uniquement définie par la pupille. Dans ce cas particulier, la pupille est entièrement éclairée. Au-delà du champ de pleine lumière un autre élément (lucarne) empêche les rayons entrant dans la pupille d'entrée de traverser tout l'instrument. On dit qu'il y a **vignettage** et que le champ est vignetté. On parle également de champ de contour. Plus on s'éloigne du bord de champ de pleine lumière, plus on perd de rayons dans l'image. La quantité de lumière du point image correspondant décroît alors jusqu'à une situation où plus aucun rayon ne passe. Le point objet a atteint le **bord de champ total**. Dans la zone de champ vignetté de l'image une décroissance de l'éclairement apparaît et est bien visible quand l'objet est homogène.



Vignettage en bord d'image.

Ici le bord de champ total n'est pas visible car plus grand que le capteur utilisé pour l'acquisition.

Les champs objet et image sont liés par la conjugaison qui lie le plan objet et le plan image obtenu avec l'instrument d'optique (via le grandissement, le grossissement ou la focale). On rappelle que ce n'est pas la même conjugaison qui lie la pupille d'entrée et la pupille de sortie.

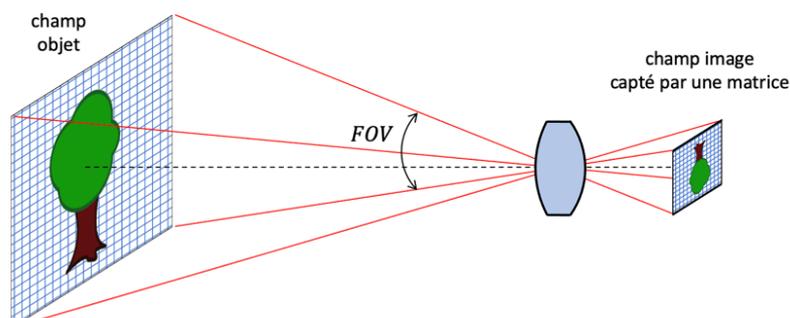
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\text{s.o.}} & A' \\
 \text{champ objet} & \xrightarrow{\text{s.o.}} & \text{champ image} \\
 & \neq & \\
 PE & \xrightarrow{\text{s.o.}} & PS
 \end{array}$$

5. Imagerie sur un capteur

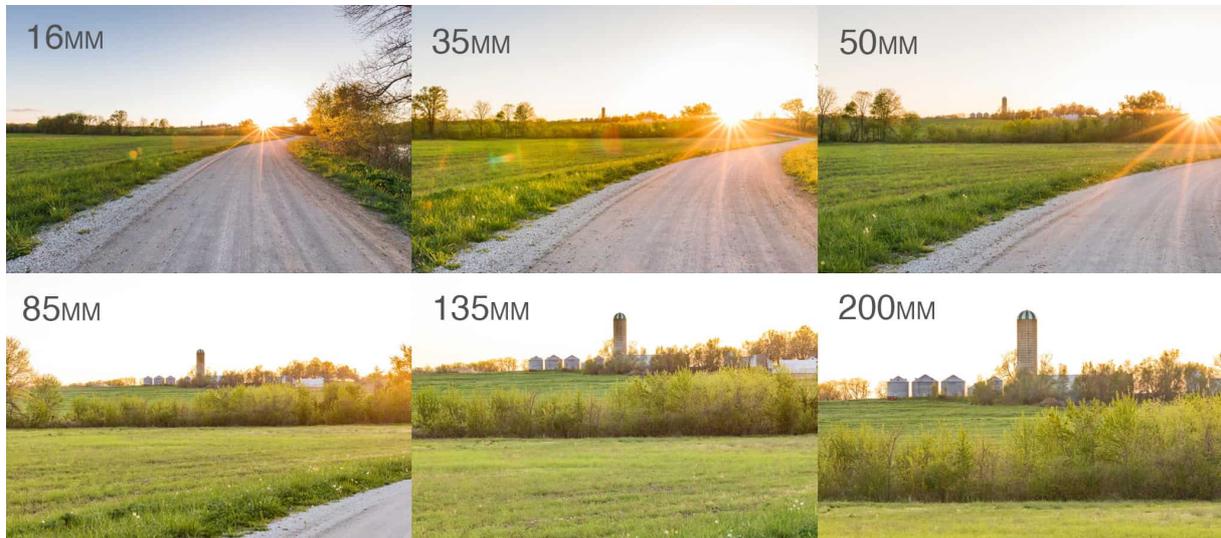
Lorsque l'image est projetée sur un capteur de taille finie et qu'elle est plus grande alors le capteur va limiter le champ optique. Il devient lucarne de champ. Le champ objet vaut donc simplement l'équivalent du capteur dans l'espace objet (via le grandissement ou focale). Si on souhaite ne pas « voir » de vignettage dans l'image captée, il est nécessaire que le diamètre du champ de pleine lumière soit supérieure à la diagonale du capteur utilisé.

En particulier dans un système qui travaille en conjugaison (quasi)infini-foyer, le champ objet est angulaire et vaut,

$$FOV(\text{radians}) = 2 \times \text{atan} \left(\frac{N_{\text{pixel}} \times \text{pixel}}{\text{focale}} \right)$$



On voit donc que le champ est d'autant plus petit que la focale est grande. C'est un classique pour celles et ceux qui pratiquent la photographie. Augmenter la focale c'est « zoomer » dans l'image.



Variation du champ avec la focale d'un objectif photographique (le capteur est identique)

6. Instrument visuel

Dans un instrument visuel l'image sera formée à l'infini grâce à un oculaire afin que l'œil puisse la voir sans accommoder. L'œil est également un système optique, schématisé par un dioptré sphérique (de focale variable), une pupille (de diamètre variable) et un capteur (la rétine). La rétine est constituée d'une zone « haute définition » (utilisée pour la lecture) appelée fovéa de diamètre 1,5 mm. Le champ objet correspondant vaut,

$$\theta_{fov\acute{e}a} = \frac{\Phi_{fov\acute{e}a}}{f_{\acute{o}eil}} = \frac{1,5 \text{ mm}}{16,7 \text{ mm}} \approx 5^\circ$$

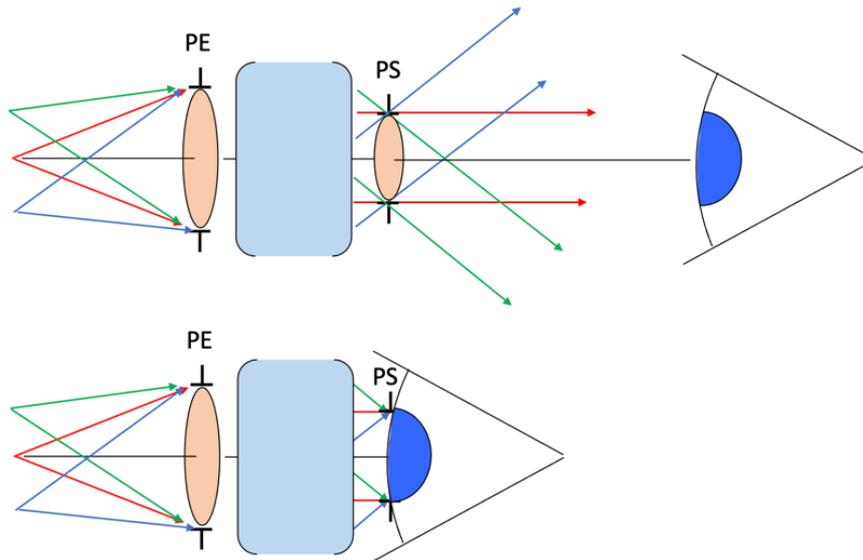
Rappel : L'essentiel de la puissance de l'œil est lié à la courbure de la cornée. Les plans principaux H et H' sont très proches de la cornée. Si on néglige la distance HH', l'œil est modélisé par un dioptré air/eau convergent de rayon de courbure R=5,6 mm et d'indice n=1,33.

$$f = -\frac{f'}{n} = \frac{R}{n-1} = 16,7 \text{ mm}$$

En raison de mouvements rapides de l'œil le champ de vision nette semble être d'environ 50°. Le champ total (dû à la rétine) de l'œil est supérieur à 180°. Un instrument visuel devra donc avoir un champ image de l'ordre de 50° pour faire une observation sans devoir trop tourner l'œil sur lui-même, ce qui ne serait pas agréable à l'usage.

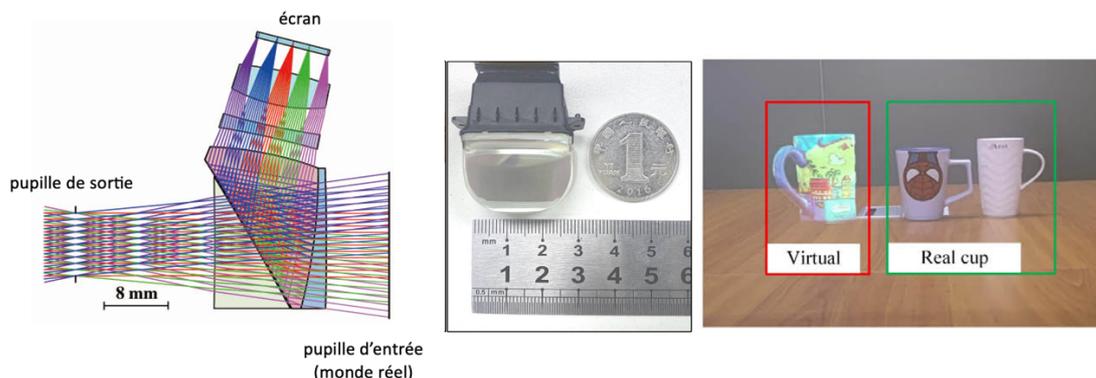
Dans un instrument, nous avons vu que tous les rayons provenant de points objets situés dans le champ de pleine lumière passent à travers la pupille de sortie. Après la pupille de sortie les rayons d'un point du champ restent parallèles (puisque l'image est à l'infini) mais s'écartent rapidement de l'axe optique (voir figure ci-dessous). On comprend par le schéma que si l'œil est trop en arrière de cette pupille de sortie, des rayons provenant de certains points du

champ ne pourront pas être collectés par la pupille de l'œil. Pour éviter cela il faut positionner l'œil au niveau de la pupille de sortie de l'instrument, appelée souvent cercle oculaire. Pour ne pas perdre de lumière il est également nécessaire que le diamètre de la pupille de sortie ne dépasse pas celui de l'œil et qu'elle soit accessible, donc une pupille de sortie virtuelle n'est pas adaptée. Un instrument diurne devra donc avoir une pupille de 3-4 mm alors que dans le cas d'un instrument nocturne elle sera de 7-8 mm.



Exemple d'instrumentation

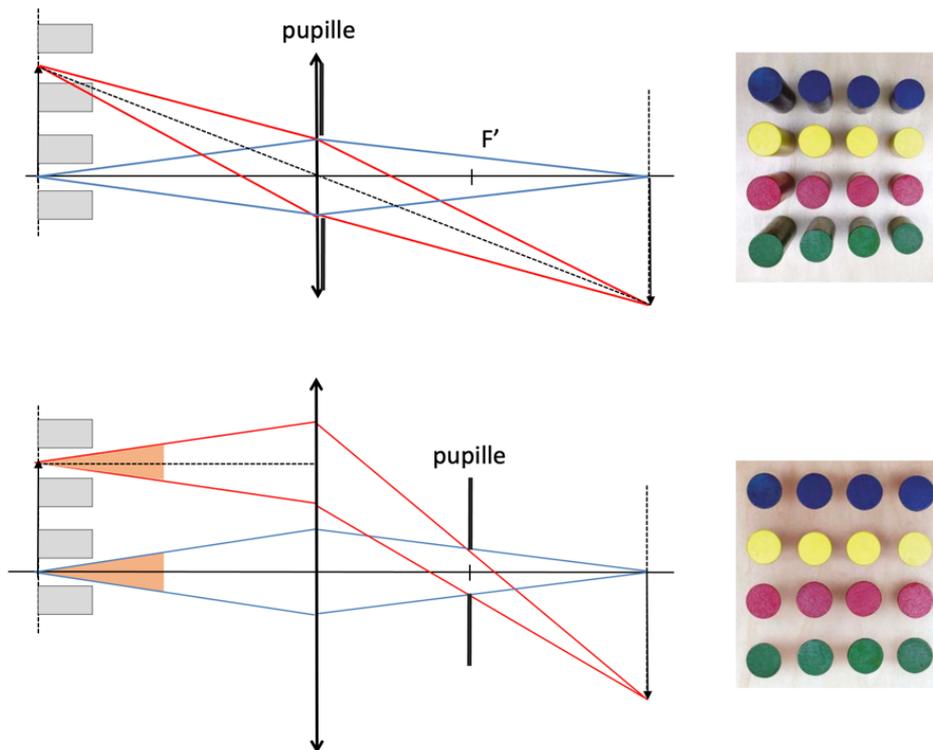
Un viseur électronique (viseur d'appareil photo compact, système de réalité augmentée ou virtuelle, viseur tête haute...) est un système qui renvoie à l'infini l'image d'un petit écran (appelé micro-display, souvent des matrices OLED). Une simple lentille ou même un simple oculaire n'est pas adapté car la pupille de sortie ne serait pas adaptée à l'œil (comme vu plus haut dans une lunette). Il faut donc s'arranger pour que cette pupille de sortie soit adaptée à l'œil en diamètre et position. On parle de « boîte d'œil » la zone où l'œil est positionné à l'usage dans un tel système. Cette zone est bien évidemment différente entre un viseur tête haute d'une voiture ou d'un système de vision de réalité virtuelle. La conception d'un tel système souvent compact fait appel à des optiques dont la forme est non classique, appelée « optique libre » (freeform optics). Ces optiques sont plus difficiles à fabriquer et à optimiser, mais elles apportent énormément de souplesse et de gain en performances.



Exemple (Beijing Engineering Research Center of Mixed Reality and Advanced Display)

7. Système télécentrique

Dans un système conventionnel, idéalisé sur le schéma ci-dessous par une lentille mince qui est pupille, le rayon moyen du cône d'ouverture partant d'un point objet (ou arrivant sur un point image) varie dans le champ. Cette variation engendre une vue déformée de l'objet ce qui peut causer des difficultés pour certaines applications d'inspection et fausser les mesures dimensionnelles (exemple : diamètres des cylindres).



Si la pupille d'entrée est à l'infini dans l'espace objet (pupille en F'), le système est appelé **télécentrique objet**. Le rayon principal est parallèle à l'axe optique pour tout point du champ de pleine lumière. Le cône d'ouverture reste de révolution autour de ce rayon. La projection de l'image est dite orthographique et ne présente pas de déformation. Un système télécentrique devra donc avoir un diamètre aussi grand que l'objet. Ils sont donc plus encombrants et plus chers.

Il existe également des systèmes télécentriques images (PS à l'infini), ou des doubles télécentriques (PE et PS à l'infini). Dans ce dernier cas, il est facile de voir qu'il s'agit forcément d'un système afocal.

C. Qualité de l'image – limite de résolution

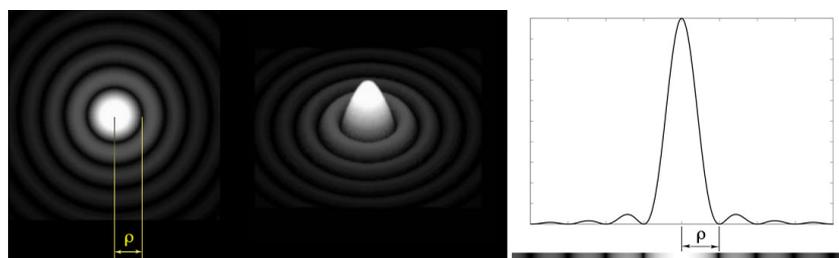
Faire une image c'est reproduire au mieux la distribution spatiale de la lumière émise par un objet. Le système optique devra donc être capable de distinguer deux points objets très proches pour reproduire des détails. Si la source est (quasi)ponctuelle on ne parle pas spécifiquement de formation d'image mais de qualité de la tache image de focalisation. La performance en résolution du système sera évaluée par la capacité de faire d'un point objet une image la plus petite possible et ce pour tous les points du champ image. Le cas géométrique idéal (l'image d'un point est un point), appelé rigoureusement stigmatisme, est, nous l'avons vu, limité à des configurations très spécifiques. Les performances seront conditionnées par une multitude de facteurs, à savoir,

- La diffraction
- Les défauts géométriques liés à la conception optique (aberrations)
- Les défauts des matériaux (inhomogénéité de l'indice, bulles)
- Les défauts des surfaces fabriquées (forme, finition)
- La mécanique (alignement, montage)
- L'environnement (température, pression, vibration)
- La résolution spatiale du détecteur (pixel)

Ces différents facteurs auront toujours comme effet d'étaler la tache image et donc de dégrader la qualité de l'image. Il faudra donc, dans le cadre d'un cahier des charges de conception d'un système optique, savoir les minimiser pour atteindre les performances visées en termes de résolution mais également d'éclairement de l'image obtenue. Après l'esquisse paraxiale du système, la recherche du meilleur compromis passe le plus souvent par l'usage d'un logiciel de conception optique. Les plus connus sont ZEMAX (enseigné en 2A) et CODE V (option 3A).

1. La diffraction

La diffraction est un écart à la propagation géométrique de la lumière. Le cours d'optique physique a montré qu'une simple ouverture perturbe le front d'onde. A l'infini derrière l'ouverture on trouve que la répartition lumineuse est directement liée à la transformée de Fourier de la pupille. On parle de diffraction à l'infini ou de régime de Fraunhofer. Dans le cas d'une conjugaison par une lentille on retrouve ce régime dans le plan image. Donc l'image d'un point à travers un système même parfaitement stigmatique engendrera un étalement du point image. Plus le système est ouvert et moins la diffraction intervient. Elle dépend uniquement de la longueur d'onde et de l'ouverture numérique du système optique. Dans le cas d'une pupille circulaire, la distribution lumineuse est appelée tache d'Airy.



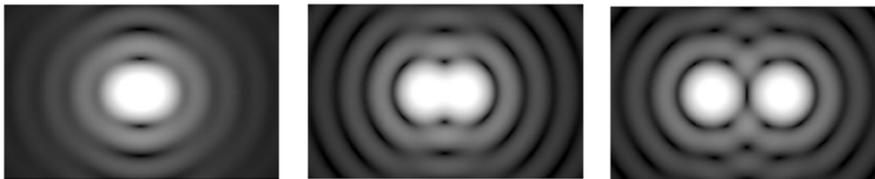
Son rayon ρ_{airy} , défini au niveau de la 1^{ère} annulation, vaut,

$$\rho_{airy} = 0,66 \frac{\lambda}{ON_{image}}$$

Cette expression peut également s'écrire dans le cas particulier de la conjugaison infini-foyer

$$\rho_{airy}^{infini-foyer} = 1,22\lambda N$$

Si un système optique est idéal alors son pouvoir de résolution sera uniquement limité par la diffraction. La résolution optique d'un système d'imagerie limitée par la diffraction est définie par le **critère de Rayleigh** et vaut le rayon de la tache d'Airy. C'est la limite pour laquelle on peut distinguer deux points objets proches malgré l'étalement dû à la diffraction.



Non résolu – limite de Rayleigh – Bien résolu

La résolution objet est donc tout simplement la tache d'Airy ramenée dans l'espace objet via le paramètre de grandeur d'image. Par exemple considérons un système infini-foyer (un télescope par exemple) et limité par la diffraction. La résolution dans l'espace image est le rayon de la tache d'Airy. On passe dans l'espace objet en divisant par la focale, soit une résolution angulaire objet,

$$\delta\theta_{objet} \approx \frac{\rho}{f'} = \frac{1,22\lambda N}{f'} = \frac{1,22\lambda}{\phi_{PE}}$$

La résolution (angulaire) d'un télescope (limité par la diffraction et sans turbulence) est donc uniquement lié au diamètre de sa pupille d'entrée (qui est en général le miroir primaire).

Dans un instrument où l'objet est à distance finie, la résolution dans l'espace objet est le rayon de la tache d'Airy divisé par le grandissement. On a,

$$\delta y_{objet} = \frac{\rho_{airy}}{g_y} = 0,66 \frac{\lambda}{g_y \times ON_{image}}$$

D'après la relation d'aplanétisme (sinus d'Abbe), on peut exprimer cette résolution en fonction de l'ouverture numérique objet.

$$\delta y = 0,66 \frac{\lambda}{ON_{objet}}$$

L'ouverture numérique est le produit de l'indice et du sinus de l'angle d'ouverture. Augmenter l'ouverture augmente la résolution. Augmenter l'indice du milieu dans lequel baigne l'objet permet également d'améliorer la résolution. C'est le principe des objectifs de microscope à immersion, où l'objet est plongé dans une huile d'indice supérieur à 1, ce qui permet d'améliorer la résolution par rapport au cas usuel « tout dans l'air ».

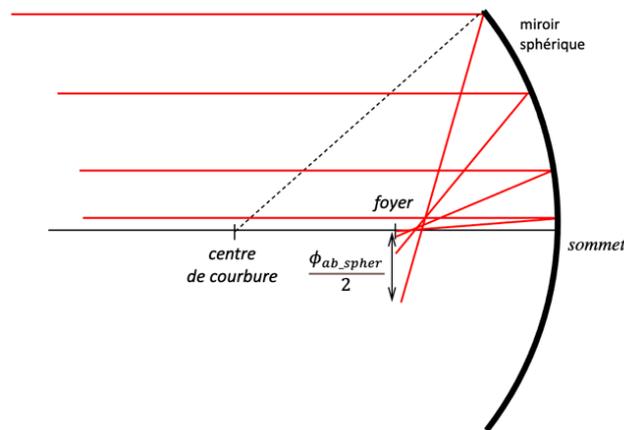
Enfin nous noterons que cette résolution tend vers une limite fondamentale lorsque l'ouverture numérique tend vers 1. On obtient la meilleure résolution possible (toujours au sens du critère de Rayleigh),

$$\delta y_{min} = 0,66 \frac{\lambda}{n}$$

La plus faible résolution est, pour un instrument idéal, égale à environ une demi-longueur d'onde.

2. Les aberrations

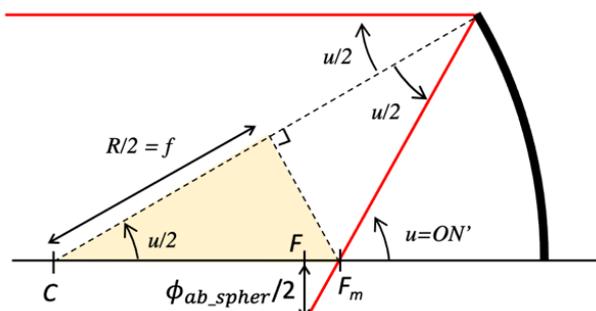
Les défauts géométriques sont quantifiés dans les logiciels de conception optique par le **spot diagram**. Il correspond aux points d'impact dans le plan image des rayons partants d'un point objet ayant traversé le système. Dans des cas simples, il est possible d'exprimer analytiquement l'étalement de la tache optique.



Par exemple dans le cas du miroir sphérique en conjugaison infini-foyer on trouve que l'étalement transversal de la tache vaut approximativement pour le point sur l'axe,

$$\phi_{ab_spher} \approx \frac{f}{32N^3}$$

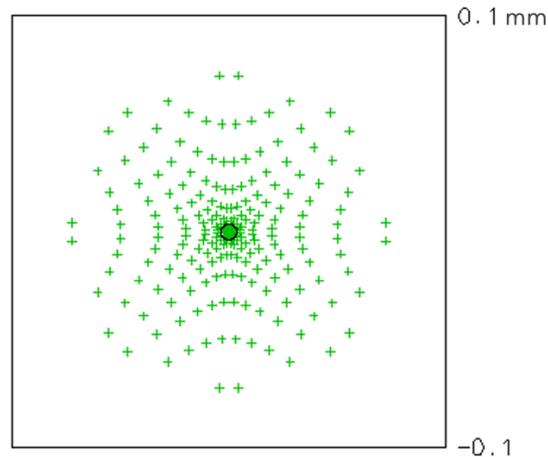
Ce défaut sur l'axe s'appelle une aberration sphérique. Plus le système est ouvert (N petit) plus le défaut est présent. Dans le cas d'une parabole ce défaut est nul puisque cette surface est rigoureusement stigmatique pour cette conjugaison. Dans le champ d'autres aberrations s'ajoutent et l'expression se complexifie. La théorie des aberrations est l'objet d'un cours en 2^{ème} année de votre formation.



$$\begin{aligned} \phi_{ab_spher} &\approx 2 \times F_m F \times u = 2 \times (F_m C + CF) \times u \\ &= 2 \times \left(\frac{f}{\cos \frac{u}{2}} - f \right) \times u \\ &= f \times \frac{u^2}{4} \times u \\ &= \frac{f}{32N^3} \end{aligned} \quad \left(\frac{1}{\cos \frac{u}{2}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{4}} \approx 1 + \frac{u^2}{8} \right)$$

Éléments de calcul pour la tache d'aberration sphérique du 3^{ème} ordre (u pas trop grand) dans le miroir sphérique en conjugaison infini-foyer ouvert à $N=1/2u$.

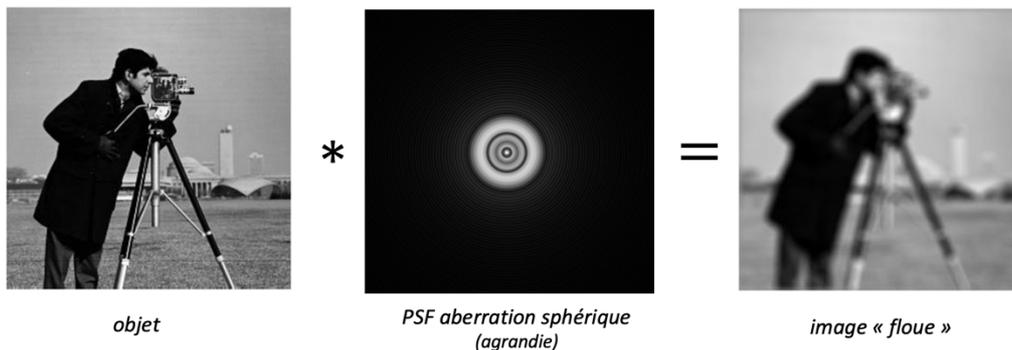
La figure ci-dessous montre le spot diagram d'un miroir sphérique de focale 1000 mm et d'ouverture $N=6$ travaillant pour un point objet à l'infini sur l'axe. Le cercle noir représente la tache de diffraction à $\lambda=500$ nm soit un diamètre $\phi_{\text{airy}} = 2,44\lambda N \approx 7 \mu\text{m}$. L'aberration sphérique, d'après le calcul précédent, donne $\phi_{\text{ab_spher}} \approx 144 \mu\text{m}$ ce qui correspond à l'ordre de grandeur de la simulation.



3. Résolution du système optique versus résolution du capteur d'image

Dans un système optique, la tache image obtenue est appelée réponse percussionnelle (en anglais, Point Spread Function, PSF). Cette fonction d'étalement du point-objet est l'équivalent de la réponse impulsionnelle dans un système électronique. Si la tache géométrique est très inférieure à la tache de diffraction alors le système est dit « **limité par diffraction** ».

Finalement puisque l'objet est une infinité de point source alors son image optique est une infinité de tache. Mathématiquement l'image est la convolution (représentée par le symbole « * ») de l'image géométrique (multiplié par le grandissement) et de la PSF du système. Si la PSF est grosse alors l'image deviendra floue.



Pour une caméra numérique, la résolution finale du système optique globale est liée au diamètre de la PSF et à la taille des pixels. Si la tache image est beaucoup plus petite que le pixel la résolution est limitée par le pixel et la résolution dans l'espace objet (cas infini-foyer) est,

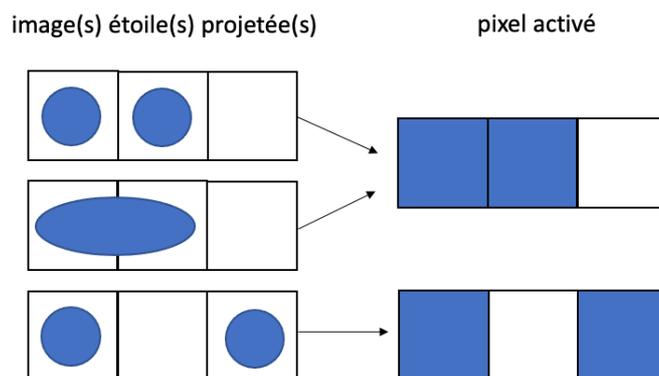
$$\delta\theta_{\text{pixel}} \approx \frac{\text{pixel}}{f'}$$



Image dégradée par la taille des pixels

Exemple :

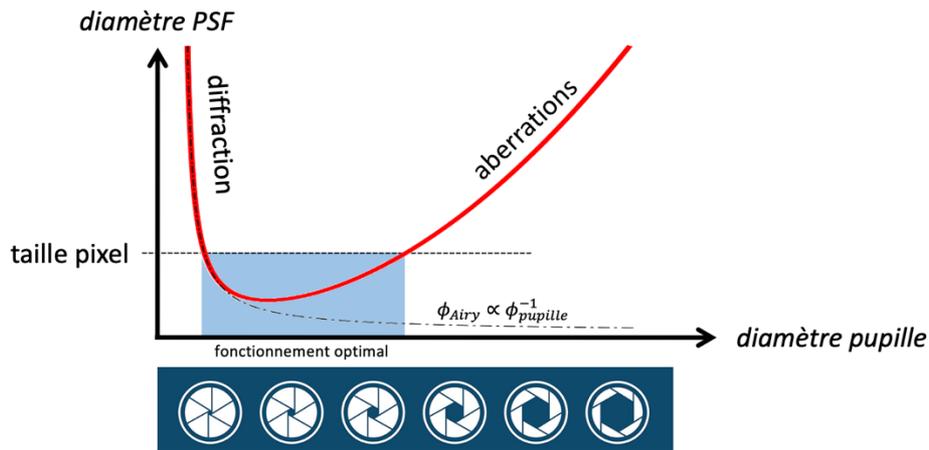
Si on cherche à distinguer deux étoiles très proches, équivalentes à des sources ponctuelles, et qu'on suppose que la tache de diffraction est plus petite que le pixel, il est alors nécessaire que chaque image soit projetée sur deux pixels différents et qu'en plus il y ait un pixel non éclairé entre, afin de lever l'ambiguïté par rapport à une étoile plus grosse mais de taille équivalente à deux petites étoiles.



L'échantillonnage minimum est donné par le critère de Shannon : la fréquence spatiale d'échantillonnage (inverse de la période d'échantillonnage = $1/\text{pixel}$) doit être au moins deux fois plus grande que l'inverse de la taille caractéristique du plus petit objet (ramené dans l'espace image) qu'on cherche à voir (ici la séparation entre les étoiles). On a donc,

$$\frac{1}{\text{pixel}} > 2 \times \frac{1}{d'_{\text{étoiles}}} \rightarrow f_e > 2 \times f_{\text{max-objet}}$$

Pour améliorer la résolution d'un objectif de mauvaise qualité couplé à un capteur pixellisé, il suffit de réduire son ouverture (fermer son diaphragme) pour diminuer les aberrations et permettre à sa PSF d'être plus petite que le pixel (ce n'est pas toujours possible). Mais si l'objectif est de très bonne qualité (en limite de diffraction), réduire son ouverture augmentera la PSF (tache d'Airy) ce qui réduira la performance.



4. Le cas de l'œil

L'œil est système optique complet (cornée, cristallin et rétine). Sa résolution sera donc limitée soit par les cônes de la rétine (équivalent aux pixels d'une caméra) ou soit par l'optique (cornée/cristallin) via la diffraction ou les aberrations.

On sait que la focale (objet) vaut 16,7 mm. Un cône fait 2,5 μm de taille caractéristique et la pupille en vision diurne vaut environ 4 mm.

La résolution limitée par le diamètre des cônes est,

$$\delta\theta_{\text{cône}} \sim \frac{\text{cône}}{f} = \frac{2,5\mu\text{m}}{16,7\text{mm}} \sim 30''$$

La résolution limitée par la diffraction est,

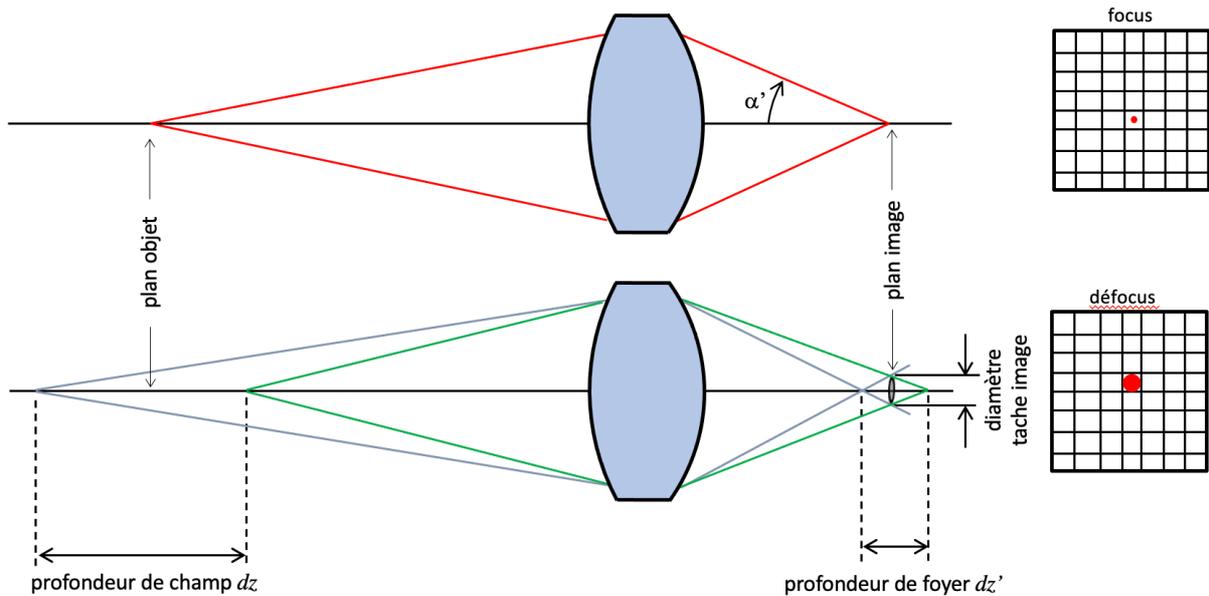
$$\delta\theta_{\text{pupille}} \sim \frac{\lambda}{\Phi_{PE}} = \frac{500\text{nm}}{4\text{mm}} = 10^{-4}\text{rad} \sim 30''$$

On peut donc dire que l'optique de l'œil est parfaitement adaptée à la rétine.

En pratique la capacité résolvante d'un œil est limitée par les aberrations de la cornée et varie de 1' à 2' pour un œil ne présentant pas de défaut de mise au point (myopie, hypermétropie)

5. Profondeur de champ

Un système optique d'imagerie stigmatique conjugue un plan objet avec un plan image. Si l'objet est plan, l'image est nette. Que se passe-t-il si le plan est incliné ? Ou si l'objet n'est pas plan ? Plus le point de l'objet est loin du plan objet conjugué, plus l'image de ce point est grande dans le plan image conjugué. La zone dz dans l'espace objet correspondant à une image nette s'appelle la profondeur de champ. Pour un système idéal elle peut dépendre de la dimension du pixel ou de la taille de la tache de diffraction. On appelle profondeur de foyer l'équivalent dans l'espace image de la profondeur de champ.



La profondeur de foyer vaut en 1^{ère} approximation,

$$dz'_{pixel} \approx \frac{pixel}{\alpha'}$$

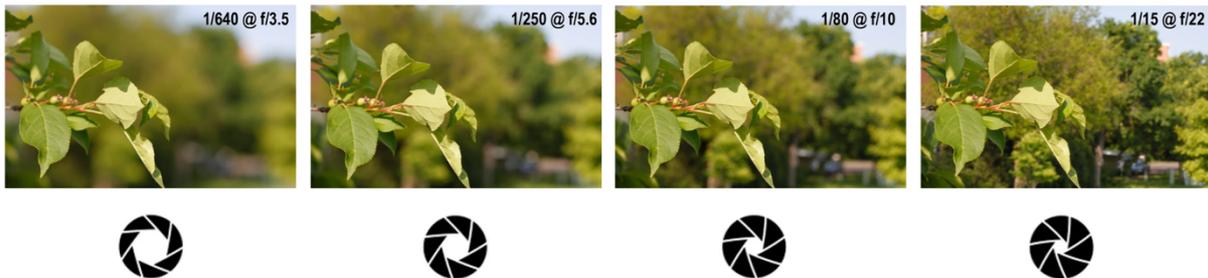
La profondeur de champ est simplement la profondeur de foyer ramené dans l'espace objet via le grandissement axial,

$$dz_{pixel} \approx \frac{pixel}{g_y^2 \times \alpha'}$$

On peut simplifier cette expression en se plaçant dans un cas classique où l'objet est à une distance $d \gg f'$. Dans ce cas, $g_y \approx \frac{f'}{d}$ et $\alpha' \approx \frac{1}{2N}$. Soit

$$dz_{pixel} \approx 2N \times pixel \times \left(\frac{d}{f'}\right)^2$$

On voit donc que la profondeur de champ est inversement proportionnelle à l'ouverture (ou proportionnel à N) et inversement proportionnelle au carré de la focale. Fermer un objectif augmente la profondeur. Une courte focale aura une plus grande profondeur qu'une longue focale. Un objectif pour photographier un paysage devra donc avoir une courte focale pour que toute la scène soit nette et pour s'ajuster au large champ transversal nécessaire.



Évolution de la profondeur de champ en fonction de l'ouverture.



Évolution de la profondeur de champ en fonction de la distance focale

Quand l'instrument travaille en conjugaison infini-foyer l'image reste nette de l'infini jusqu'à une certaine distance, appelée **distance hyperfocale**. La démarche est identique au calcul de la profondeur de champ.

Dans l'espace image, on a,

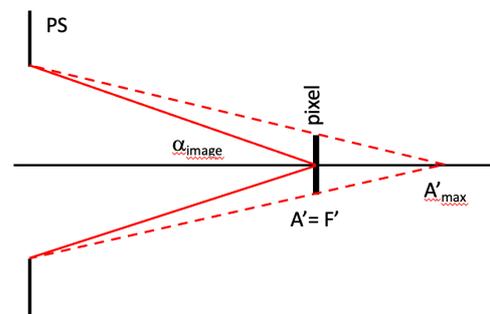
$$2\alpha_{image} = \frac{1}{N} \sim \frac{pixel}{F'A'_{max}}$$

La distance hyperfocale H est obtenue en passant la distance $F'A'_{max}$ dans l'espace objet en utilisant la relation de conjugaison aux foyers,

$$H \times \overline{F'A'_{max}} = -f'^2$$

Soit

$$H \sim \frac{f'^2}{N \times pixel}$$



6. Précisions de pointés

Dans un système visuel, comme un viseur utilisé pour effectuer des mesures de pointés longitudinaux, la précision dépend de la tache image au foyer objet de l'oculaire (diffraction, aberration) et de la capacité de l'œil à maintenir une accommodation stable, c'est-à-dire la capacité de voir net un objet lointain ou proche. Nous allons déterminer séparément la précision pour les deux effets.

La tache de diffraction de l'objectif (car pupille) empêche l'œil de faire la mise au point précisément sur le plan focal de l'oculaire (incertitude dz') équivalent à une imprécision de pointé dz dans le plan objet. Cette précision est égale à la profondeur de champ de l'objectif limité par la diffraction (vue précédemment),

$$dz'_{diffraction} \approx \frac{\Phi_{diffraction}}{\alpha'} \approx \frac{\lambda}{\sin^2 \alpha'}$$

Ramené dans l'espace objet par le grandissement transversal de l'objectif et en utilisant la relation des sinus d'Abbe, on a,

$$dz_{diffraction} \approx \frac{\lambda}{g_y^2 \times \alpha'^2} = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

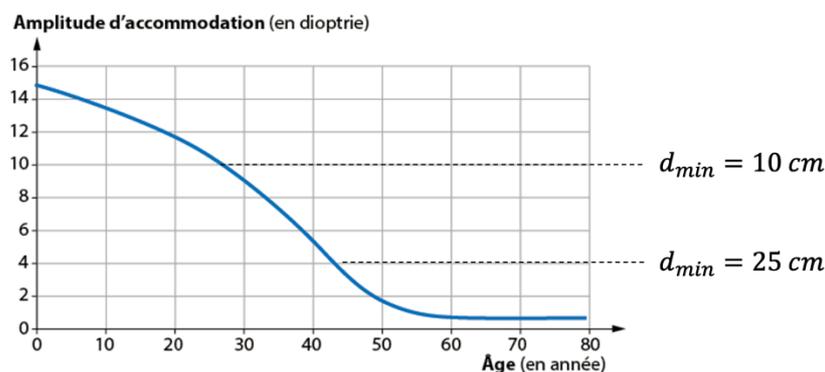
L'œil est l'association d'une cornée et d'un cristallin de puissance variable permettant l'accommodation. Un œil peut alors accommoder au plus loin à d_{\max} (punctum remotum) quand il est au repos (pour un œil normal $d_{\max} = \infty$) jusqu'à une distance minimale d_{\min} (punctum proximum).

La puissance optique de l'œil est liée à sa focale ($f = 16,7 \text{ mm}$; $f' = 22,3 \text{ mm}$).

$$P_{\text{œil au repos}} = \frac{1}{f} = \frac{n}{f'} = \frac{1}{16,7 \text{ mm}} = 60\delta$$

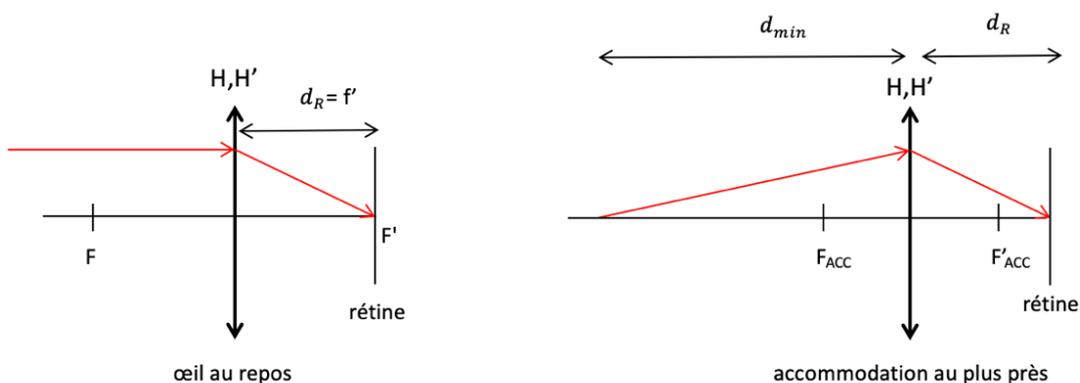
La puissance (ou convergence) de l'œil est due à la cornée et à la puissance variable du cristallin. Ce dernier possède 22000 couches cellulaires pour lui donner la plasticité nécessaire à sa variation de forme commandée par le muscle ciliaire. La puissance du cristallin peut varier de 14 dioptries pour un enfant de 5 ans et jusqu'à 1 voire 0 dioptrie au-delà de 50 ans. Cette variation avec l'âge s'appelle la presbytie.

$$P_{\text{œil}} = P_{\text{cornée}} + P_{\text{cristallin}} + dP_{\text{cristallin}} = 44\delta + 16\delta + dP_{\text{cristallin}}$$



Évolution de l'amplitude d'accommodation en fonction de l'âge.
On retiendra que la moyenne se situe autour de 4 dioptries à 40 ans.

Lorsque l'œil est au repos, il n'accorde pas et regarde à l'infini. Lorsqu'il accomode au plus près, il regarde à la distance minimale d_{\min} .



Pour un œil normal (emmétrope) au repos, le foyer image se trouve sur la rétine, soit

$$f'_{repos} = d_R \rightarrow P_{repos} = \frac{1}{d_R} = \frac{1}{0,223} = 60\delta$$

L'accommodation est la variation de puissance de l'œil (ici permise par le cristallin),

$$\Delta P = P_{oeil\ ACC} - P_{oeil\ REPOS}$$

Lorsque l'œil accommode au plus près (distance objet-œil d_{min}), la taille de l'œil ne change pas mais la focale varie. On peut donc écrire,

$$\frac{1}{d_R} + \frac{1}{d_{min}} = \frac{1}{f'_{ACC}} \rightarrow P_{oeil\ REPOS} + \frac{1}{d_{min}} = P_{oeil\ ACC}$$

On voit donc que l'inverse de l'accommodation donne accès à la distance minimale d'approche.

$$d_{min} = \frac{1}{\Delta P}$$

Par exemple, 4 dioptries équivaut donc un quart de mètre soit 25 cm.

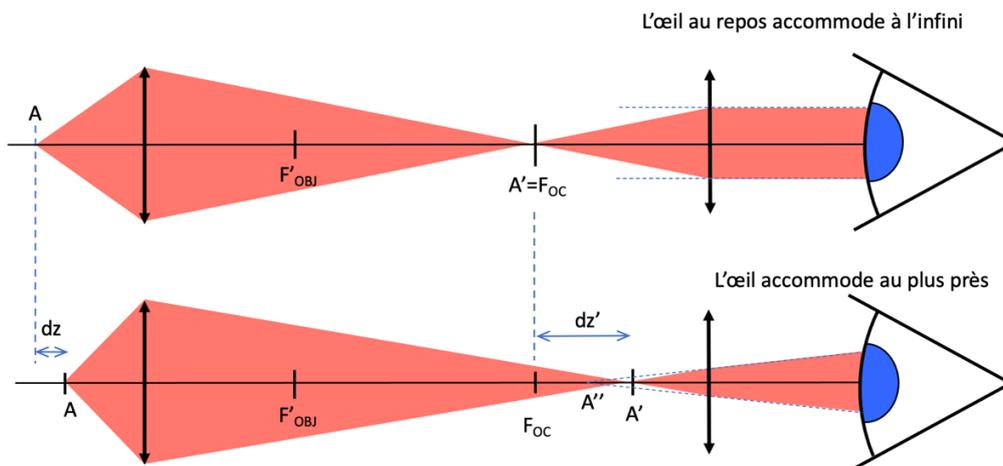
Maintenant revenons à notre viseur et estimons l'erreur de pointé liée à une accommodation de l'œil. On écrit les conjugaisons lorsque l'œil regarde à l'infini et à la distance d'accommodation,

$$A \xrightarrow{\text{objectif}} A' = F_{OC} \xrightarrow{\text{oculaire}} A'' = \infty$$

$$A + dz_{acc} \xrightarrow{\text{objectif}} A' = F_{OC} + dz'_{acc} \xrightarrow{\text{oculaire}} A''$$

L'œil est placé au niveau de la pupille de sortie, elle-même proche de F'_{OC} , la distance d'accommodation ($1/Ac$) est donc directement la distance entre le foyer F'_{OC} et l'image finale A'' .

$$dz_{acc} = \frac{dz'_{acc}}{g_{x-obj}} = \frac{F_{oc}A'}{g_{x-obj}} = \frac{f'^2_{oc}}{g^2_{y-obj} \times F'_{oc}A''}$$



Prenons par exemple, un objectif de grandissement 2,5 d'ouverture 0,1 associée avec un oculaire $\times 10$. On considère une distance d'accommodation de 25 cm (soit 4δ).

Le grossissement commercial de l'oculaire permet de calculer sa focale.

$$G_c = \frac{1}{4f'} \rightarrow f'_{oc} = \frac{1}{40} m = 25 \text{ mm}$$

On en déduit la précision liée à l'accommodation,

$$dz_{acc} = \frac{f'^2_{oc}}{g^2_{y-obj} \times F'_{oc} A''} = \frac{25^2}{2,5^2 \times 250} = 0,4 \text{ mm}$$

L'ouverture de l'objectif permet de déterminer la précision liée à la diffraction,

$$dz_{diffraction} \approx \frac{\lambda}{\alpha^2} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,1^2} = 0,05 \text{ mm}$$

La précision de pointé est donc ici limitée par l'accommodation. Si on réduit cette dernière à $0,1\delta$ (en forçant l'œil à regarder le plan focale grâce à un réticule) la précision associée diminue à 0,01 mm et la précision de la mesure est maintenant limitée par la diffraction.