1A - S6 - IéTI

TD 9

Asservir un système

OBJECTIFS

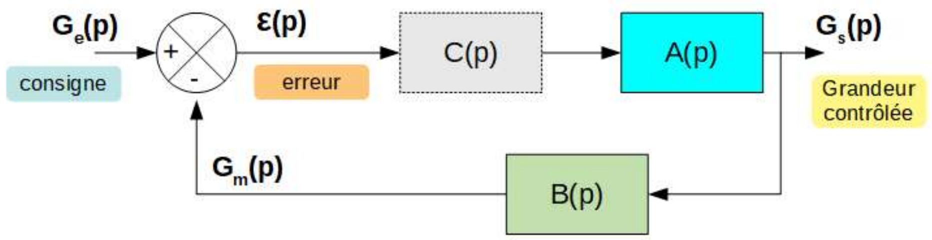
— Schématiser une boucle d'asservissement.

— Différencier les performances d'un système en boucle ouverte et en boucle fermée.

— Rappeler le rôle d'un correcteur dans une boucle d'asservissement.

1. Boucle ouverte et boucle fermée

On s'intéresse au système bouclé suivant :



où :

— $A(p)$: système à asservir

— $B(p)$: système de mesure (retour) de la grandeur à asservir

— $C(p)$: correcteur de l'asservissement

— $G_e(p)$: grandeur physique de consigne

— $G_s(p)$: grandeur physique de sortie

— $\varepsilon(p)$: erreur entre la consigne et la sortie

1. Calculez la fonction de transfert en boucle ouverte : $TF_{BO}(p) = \frac{G_m(p)}{\varepsilon(p)}$

REPONSE

$TF_{BO}(p) = \frac{G_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) \cdot A(p) \cdot B(p)$

2. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée : $TF_{BF}(p) = \frac{G_s(p)}{G_e(p)}$

REPONSE
On a $G_s(p) = C(p) \cdot A(p) \cdot \varepsilon(p)$ et $\varepsilon(p) = G_e(p) - B(p) \cdot G_s(p)$
On obtient alors : $G_s(p) = C(p) \cdot A(p) \cdot (G_e(p) - B(p) \cdot G_s(p))$
Ce qui donne :

$$TF_{BF}(p) = \frac{G_s(p)}{G_e(p)} = \frac{A(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot C(p) \cdot B(p)}$$

3. Ce système peut-il être instable ?

REPONSE
Il peut devenir instable si pour une valeur de fréquence (pulsation), $A(p) \cdot C(p) \cdot B(p) = -1$.

2. Asservissement en vitesse d'un MCC

On rappelle qu'un moteur à courant continu peut être modélisé sous la forme (si les frottements visqueux sont négligés) :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1}{K_C} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_m \cdot p) \cdot (1 + \tau_e \cdot p)}$$

Avec $\tau_m = R \cdot J / K^2$ et $\tau_e = L/R$
Et où :
— $U(p)$: tension d'alimentation
— $\Omega(p)$: vitesse de rotation
— K_C : coefficient de conversion ; J : inertie du moteur

On prendra les valeurs suivantes : $K = 0.1$ Nm/A (ou en V/rd/s), $J = 0.01$ jg. m^2, $L = 0.5$ mH et $R = 0.1\ \Omega$.

1. Donnez les expressions de H_0, le gain statique, m_H, le facteur d'amortissement, et de ω_H, la pulsation propre de ce système par identification à un système du second ordre.

REPONSE

On rappelle qu'un système du second ordre peut se mettre sous la forme :

$$DO(p) = \frac{H_0}{(1 + 2 \cdot m \cdot \frac{p}{\omega_0} + 1 + \tau_e \cdot p)}$$

En développant l'expression du modèle du moteur, on obtient :

$$H(p) = \frac{1}{K_C} \cdot \frac{1}{(1 + (\tau_e + \tau_m) \cdot p + \tau_e \cdot \tau_m \cdot p^2)}$$

On a alors : $H_0 = \frac{1}{K_C}$, $w_H = \sqrt{\frac{1}{\tau_e \cdot \tau_m}}$ et $m_H = \frac{\tau_e + \tau_m}{2} \cdot w_H$

2. Calculez les valeurs de m_H, le facteur d'amortissement, et de ω_H, la pulsation propre de ce système.

REPONSE

On obtient : $H_0 = 10$, $w_H = 44.7$ rd/s (ou $f_H = 7.1$ Hz) et $m_H = 2.34$.

On souhaite asservir en vitesse ce moteur avec un capteur qui a pour fonction de transfert $M(p) = 1$.

On appellera $\Omega_s(p)$ la vitesse de sortie et $U_e(p)$ la tension de consigne.

3. Proposez un schéma bloc du système complet.

REPONSE

Voir graphique de l'exercice précédent avec $A(p) = H(p)$ et $B(p) = M(p)$.

4. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée de ce système :

$$G(p) = \frac{\Omega_s(p)}{U_e(p)}$$

.

REPONSE

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p) \cdot M(p)} = \frac{\frac{H_0}{(1+(\tau_e+\tau_m)\cdot p+\tau_e\cdot\tau_m\cdot p^2)}}{1 + \frac{H_0}{(1+(\tau_e+\tau_m)\cdot p+\tau_e\cdot\tau_m\cdot p^2)}}$$

On obtient alors :

$$G(p) = \frac{H_0}{1 + H_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau_e+\tau_m}{1+H_0} + \frac{\tau_e\cdot\tau_m\cdot p^2}{1+H_0}}$$

5. Donnez les expressions et calculez les valeurs de G_0, le gain statique, m_G, le facteur d'amortissement, et de ω_G, la pulsation propre de ce système par identification à un système du second ordre.

REPONSE
On obtient : $G_0 = \frac{H_0}{1+H_0}$, $w_G = w_H \cdot \sqrt{1+H_0}$ et $m_G = \frac{m_H}{1+H_0}$
Après calcul, on obtient : $G_0 = 10/11 = 0.909$, $w_G = 148\,\text{rd/s}$ ($f_G = 23.6\,\text{Hz}$) et $m_G = 0.21$

On souhaite corriger l'asservissement en vitesse de ce moteur par un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

6. Proposez un schéma bloc du système complet.

REPONSE
Voir graphique de l'exercice précédent avec $A(p) = H(p)$, $C(p) = K$ et $B(p) = M(p)$.

7. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée de ce système :

$$F(p) = \frac{\Omega_s(p)}{U_e(p)}$$

.

REPONSE

$$F(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p) \cdot M(p)} = \frac{\frac{K \cdot H_0}{(1+(\tau_e+\tau_m)\cdot p+\tau_e\cdot\tau_m\cdot p^2)}}{1 + \frac{K\cdot H_0}{(1+(\tau_e+\tau_m)\cdot p+\tau_e\cdot\tau_m\cdot p^2)}}$$

On obtient alors :

$$F(p) = \frac{K \cdot H_0}{1 + K \cdot H_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau_e+\tau_m}{1+K\cdot H_0} + \frac{\tau_e\cdot\tau_m\cdot p^2}{1+K\cdot H_0}}$$

8. Donnez les expressions de F_0, le gain statique, m_F, le facteur d'amortissement, et de ω_F, la pulsation propre de ce système par identification à un système du second ordre.

REPONSE
On obtient : $F_0 = \frac{H_0}{1+K\cdot H_0}$, $w_F = w_H \cdot \sqrt{1 + K \cdot H_0}$ et $m_F = \frac{m_H}{1+K\cdot H_0}$

9. Donnez les valeurs de F_0, de m_F et de ω_F pour (a) $K = 5$ (b) $K = 50$.

REPONSE
(a) Après calcul, on obtient : $F_0 = 50/51 = 0.98$, $w_F = 319$ rd/s ($f_F = 50.8$ Hz) et $m_F = 0.046$
(b) Après calcul, on obtient : $F_0 = 500/501 = 0.998$, $w_F = 1001$ rd/s ($f_F = 160$ Hz) et $m_F = 0.0047$

3. Amplificateur Linéaire Intégré et rebouclage

3.1. Etude d'un suiveur / amplificateur non-inverseur

On peut modéliser un amplificateur linéaire intégré par un système du premier ordre de type :

$$A(p) = \frac{V_S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

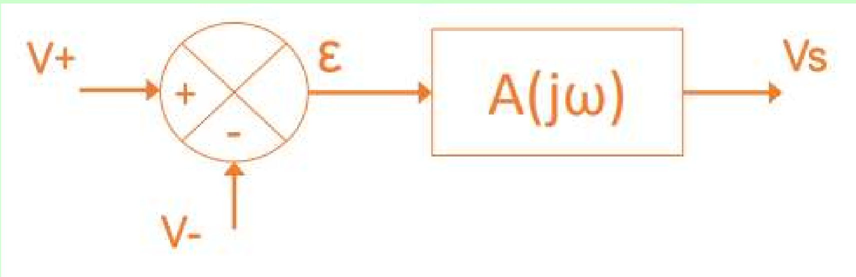
où $V_S(p)$ est la tension de sortie de l'ALI et $\varepsilon(p) = V^+(p) - V^-(p)$ la tension différentielle d'entrée.

1. Quelle relation existe-t-il entre A_0, ω_c et GBP (le produit gain bande-passante de l'ALI) ?

REPONSE
Le produit gain bande-passante est constant, ainsi : $A_0 \cdot f_c = GBP$, on a alors que : $w_c = 2 \cdot \pi \cdot GBP/A_0$

2. Tracez la réponse en fréquence asymptotique en gain de ce système.

REPONSE
Ce système peut se modéliser sous forme de schéma bloc de la façon suivante :



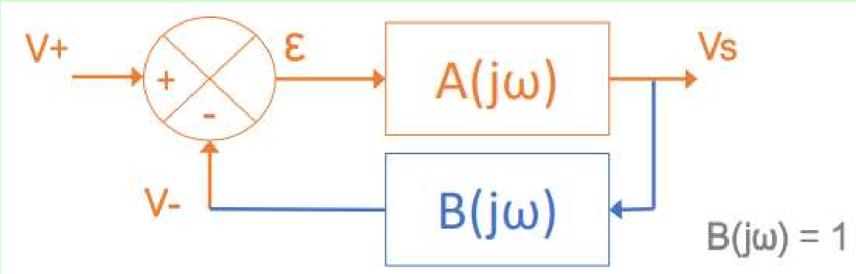
On obtient le comportement d'un passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure vaut ω_c.

3. Calculez le gain statique et la pulsation (ou fréquence) caractéristique de ce système si on suppose que $A_0 = 10^5$ et $GBP = 3\,\text{MHz}$?

REPONSE
Le gain statique (dans la bande-passante) vaut $G_0 = 20 \cdot \log A_0 = 100\,\text{dB}$.
La bande-passante vaut : $f_c = GBP/A_0 = 30\,\text{Hz}$.

4. Proposez un schéma bloc pour un **montage suiveur**.

REPONSE



5. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée de ce montage.

REPONSE
On a $H(p) = A(p)/(1 + A(p) \cdot B(p)$ avec $A(p)$ la fonction de transfert de l'ALI et $B(p) = 1$.
On obtient alors :

$$H(p) = \frac{\frac{A_0}{1+\frac{p}{\omega_c}}}{1 + \frac{A_0}{1+\frac{p}{\omega_c}}}$$

Après simplification, on obtient :

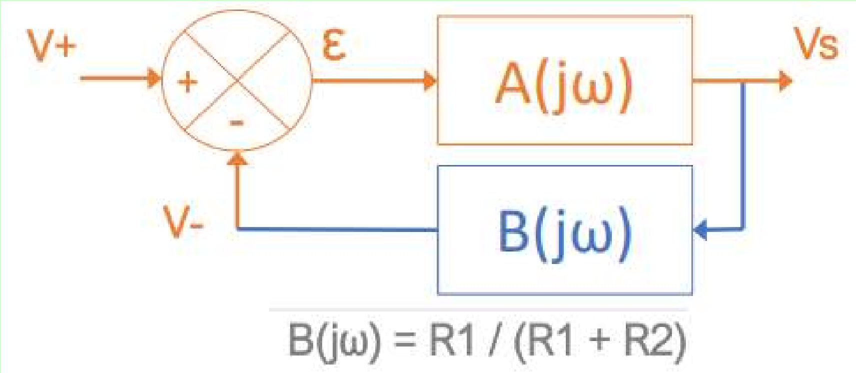
$$H(p) = \frac{A_0}{1 + A_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c \cdot (1+A_0)}}$$

6. Que valent à présent le gain statique et la pulsation caractéristique de ce système (pour les mêmes valeurs de A_0 et GBP) ?

REPONSE
Le gain statique vaut : $H_0 = \frac{A_0}{1+A_0} \approx 1$.
La pulsation caractéristique vaut : $\omega_0 = \omega_c \cdot (1 + A_0)$.
donc $f_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot (1 + A_0) = GBP \cdot \frac{1+A_0}{A_0} \approx 3\,\text{MHz}$.

7. Proposez un schéma bloc pour un **montage amplificateur non-inverseur**.

REPONSE



$B(p) = V-(p)/V_S(p) = R_1/(R_1+R_2)$ si R_2 est la résistance de contre-réaction et R_1 la résistance à la masse.

8. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée de ce montage.

REPONSE

On a $G(p) = A(p)/(1 + A(p) \cdot B(p)$ avec $A(p)$ la fonction de transfert de l'ALI et $B(p) = \frac{R_1}{R_1+R_2}$.
On obtient alors :

$$G(p) = \frac{\frac{A_0}{1+\frac{p}{\omega_c}}}{1 + \frac{A_0}{1+\frac{p}{\omega_c} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}}}$$

Après simplification, on obtient :

$$G(p) = \frac{A_0}{1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c} \cdot \frac{1}{1+A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}}}$$

9. Que valent à présent le gain statique et la pulsation caractéristique de ce système (pour les mêmes valeurs de A_0 et GBP) ?

REPONSE

Le gain statique vaut alors : $G_0 = \frac{A_0}{1+A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}}$

On peut simplifier si A_0 est "grand" par : $G_0 = \frac{R_1+R_2}{R_1}$.

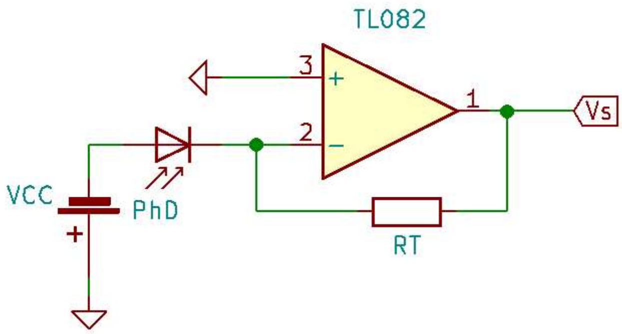
La pulsation de coupure vaut : $\omega_0 = \omega_c \cdot (1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2})$,

donc $f_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot (1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}) = GBP \cdot \frac{(1+A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2})}{A_0}$.

On peut là aussi simplifier si A_0 est "grand" par $f_0 = GBP \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$

3.2. Etude du transimpédance

On s'intéresse à présent au montage transimpédance suivant :



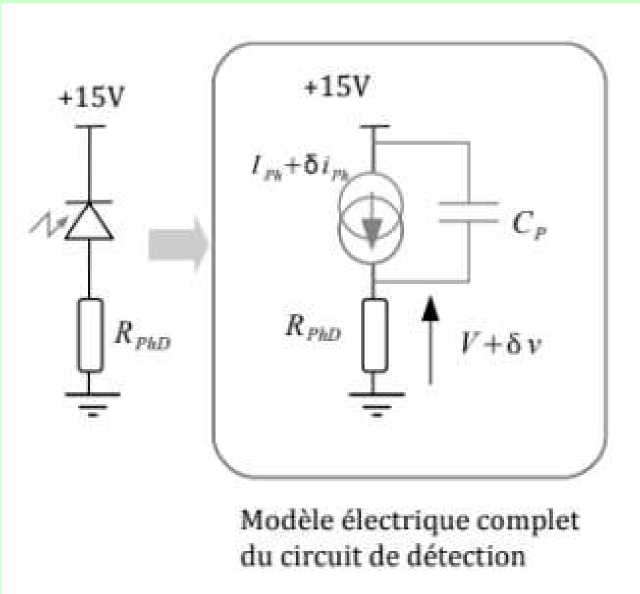
On modélise l'amplificateur linéaire intégré par la fonction de transfert suivante (voir paragraphe précédent) :

$$A(p) = \frac{V_S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

On appelle $I_{PhD}(p)$ le courant sortant de la photodiode.

1. Rappelez le modèle équivalent d'une photodiode. A quoi sert la source de tension V_{CC} ?

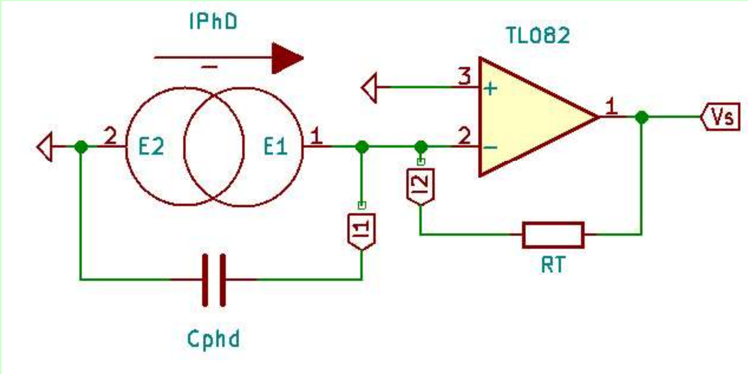
REPONSE



On peut modéliser une photodiode par une source parfaite de courant (dont l'intensité dépend du nombre de photons reçus) en parallèle d'une capacité. La source de tension continue V_{CC} permet de polariser la photodiode et de diminuer la valeur de la capacité parasite.

2. Calculez la fonction de transfert $H(p) = \frac{V_S(p)}{I_{PhD}(p)}$.

REPONSE



On s'intéresse au modèle petits signaux.
La sortie de l'ALI peut s'écrire : $V_S(p) = A(p)(V^+(p) - V^-(p))$, avec $V^+(p) = 0$, d'où

$$V^-(p) = -V_S(p)/A(p)$$

Calcul de $V-(p)$ **:**

$$I_{phd}(p) = I_1(p) + I_2(p)$$

(loi des noeuds et $I-$ de l'ALI nul)
$V^-(p) - V_S(p) = R_T \cdot I_2(p)$ (loi d'Ohms)
$V^-(p) = I_1(p)/(p \cdot C_{PhD}$ (loi d'Ohms)
On obtient alors :

$$I_{phd}(p) = V^-(p) \cdot p \cdot C_{PhD} + (V^-(p) - V_S(p))/R_T$$

Puis :

$$I_{phd}(p) = -V_S(p) \cdot \frac{p \cdot CPhD}{A(p)} - \frac{V_S(p)}{A(p) \cdot R_T} - \frac{V_S}{R_T}$$

On obtient alors :

$$H(p) = -\frac{A(p) \cdot R_T}{p \cdot R_T \cdot C_{PhD} + 1 + A(p)}$$

REPONSE

On pose $\omega_k = 1/(R_T \cdot C_{PhD})$.
Après développement, on obtient :

$$H(p) = \frac{A_0 \cdot R_T}{(1+\frac{p}{\omega_k}) \cdot (1+\frac{p}{\omega_c}) + A_0}$$

On peut arriver à l'expression suivante :

$$H(p) = \frac{A_0 \cdot R_T}{1+A_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{p}{1+A_0} \cdot (\frac{1}{\omega_c}+\frac{1}{\omega_k}) + \frac{p^2}{1+A_0} \cdot \frac{1}{\omega_k \cdot \omega_c}}$$

3. Calculez la pulsation propre de ce système et le coefficient d'amortissement.

REPONSE

Par identification, on peut obtenir :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_k \cdot \omega_c \cdot (1+A_0)}$$

Et

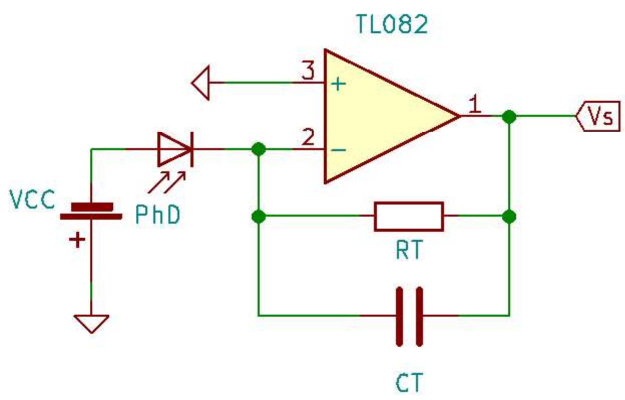
$$\frac{2 \cdot m}{\omega_0} = \frac{1}{1+A_0} \cdot \frac{\omega_k + \omega_c}{\omega_k \cdot \omega_c}$$

4. Comparez ces valeurs à la pulsation propre du montage de photod ?tection "simple" (sans ALI).

REPONSE

Dans le cas simple, on a : $\omega_0 = \omega_k$ et pour le transimpédance : $\omega_0 = \sqrt{\omega_k \cdot \omega_c \cdot (1+A_0)}$ d'où $f_0 \approx \sqrt{f_k \cdot GBP}$

On utilise à présent le montage suivant :



5. Calculez la nouvelle fonction de transfert $G(p) = \frac{V_S(p)}{I_{PhD}(p)}$.

REPONSE

Comme dans l'exemple précédent, on a :

$$I_{phd}(p) = I_1(p) + I_2(p)$$

(loi des noeuds et $I-$ de l'ALI nul)
Avec :
$V^-(p) - V_S(p) = \frac{R_T}{1+p \cdot R_T \cdot C_T} \cdot I_2(p)$ (loi d'Ohms)
$V^-(p) = I_1(p)/(p \cdot C_{PhD})$ (loi d'Ohms)
On obtient alors :

$$I_{phd}(p) = -V_S(p) \cdot \frac{p \cdot CPhD}{A(p)} - \frac{V_S(p) \cdot (1 + p \cdot R_T \cdot C_{PhD}) \cdot (1 + A(p))}{A(p) \cdot R_T}$$

On pose $\omega_k = 1/(R_T \cdot C_{PhD})$ et $\omega_T = 1/(R_T \cdot C_T)$.
On obtient :

$$G(p) = -\frac{A(p) \cdot R_T}{\frac{p}{\omega_k} + (1 + A(p)) \cdot (1 + \frac{p}{\omega_T})}$$

On obtient alors :

$$G(p) = \frac{-A_0 \cdot R_T}{A_0 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{A_0+1} \cdot (\frac{A_0+1}{\omega_T} + \frac{1}{\omega_k} + \frac{1}{\omega_c}) + \frac{p^2}{\omega_c \cdot (A_0+1)} \cdot (\frac{1}{\omega_T} + \frac{1}{\omega_k})}$$

6. Calculez la pulsation propre de ce nouveau système et le coefficient d'amortissement.

REPONSE

Par identification, on obtient :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_c \cdot (A_0 + 1) \cdot \omega_T \cdot \omega_k}{(\omega_k + \omega_T)}}$$

Et

$$m = \frac{1}{2} \cdot (\frac{A_0 + 1}{\omega_T} + \frac{1}{\omega_k} + \frac{1}{\omega_c}) \cdot \frac{\omega_0}{A_0 + 1}$$