

Travaux Pratiques d'Optique

Mesures optiques visuelles

Introduction	1
1 Différentes méthodes de mesure de distance focale	5
2 Mesures précises de distances focales et de frontales	13
Annexe. Les incertitudes de mesure en travaux pratiques.	25
Annexe. Schéma.	40

Salle S1.7

lense.institutoptique.fr | Première année | Optique S5

Cycle Ingénieur - 1^{ère} année - S5 -Palaiseau
Version du 15 juillet 2021
Année 2021-2022

Introduction

Ces deux séances de Travaux Pratiques sont une première occasion de mettre en œuvre des principes de l'optique instrumentale et de mesures optiques étudiés en cours en première année, d'apprendre à faire des mesures précises et rigoureuses et d'évaluer soigneusement la précision de ces mesures. A l'issue de ces deux séances vous serez capables de :

- concevoir le protocole de mesure des grandeurs géométriques d'un système optique,
- choisir les instruments et mettre en œuvre de telles mesures,
- régler et calibrer un microscope (pour la mesure de la dimension transverse d'un objet petit) et une lunette afocale (pour la mesure de l'angle sous lequel est vu un objet à l'infini)
- évaluer les incertitudes.

Conseils pratiques

Compte-rendu Un seul compte-rendu rassemblera l'ensemble de vos résultats et de vos remarques. Ce compte-rendu doit avoir l'esprit d'un rapport scientifique fait par un·e ingénieur·e et répondant aux problématiques qui lui sont posées (avec introduction, conclusion, etc...). Répondez bien à toutes les questions du sujet sans pour autant présenter votre compte-rendu comme une simple succession de réponses : vous prendrez soin d'analyser et d'interpréter le plus clairement possible vos observations, en faisant part des difficultés rencontrées le cas échéant. Il est également demandé de ne pas recopier ou paraphraser des paragraphes entiers du sujet (notamment les procédures de réglage) : si besoin, donnez-en simplement les grandes lignes en faisant référence au texte.

Mesures Utiliser correctement les réticules afin d'obtenir les mesures les plus précises possibles, c'est à dire le plus grand nombre de graduations. Toujours noter les conditions de mesures (objectif de viseur utilisé, nombre de graduations,...) On donnera systématiquement toutes les **mesures brutes** (nombre

de graduations, . . .), puis l'analyse de ces mesures, de façon à permettre de revenir rapidement sur des incohérences et identifier s'il s'agit d'erreurs de calcul ou de mesure.

Incertitudes Il vous est demandé d'évaluer les incertitudes de mesures avec soin, l'annexe *Les incertitudes de mesure en Travaux Pratiques* donne des éléments pour vous y aider.

Rappels d'optique paraxiale

Les méthodes de mesures de la focale sont très importantes pour un ingénieur-opticien. Il apparaît souvent que la focale réelle d'un système optique acheté dans le commerce diffère de 2 à 5% de la valeur donnée en catalogue ou gravée sur la monture mécanique. Cette différence peut compromettre le bon fonctionnement d'un instrument conçu sans avoir vérifié les valeurs données en catalogue.

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, tout système optique (à l'exception des systèmes afocaux) peut être modélisé par ses plans principaux (objet et image) et ses foyers (objet et image). La distance focale image est $f' = \overline{H'F'}$. Si les milieux de part et d'autre du système ont le même indice, la distance focale objet \overline{HF} est $f = -f'$ ($\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$ sinon).

La distance focale est la caractéristique la plus importante des systèmes optiques d'imagerie. La focale f' détermine la dimension de l'image d'un objet situé à l'infini, c'est à dire $y' = f' \tan(\theta)$, où θ est la dimension angulaire d'un objet situé à l'infini et y' la dimension de son image par le système optique étudié comme représenté sur la figure 1.

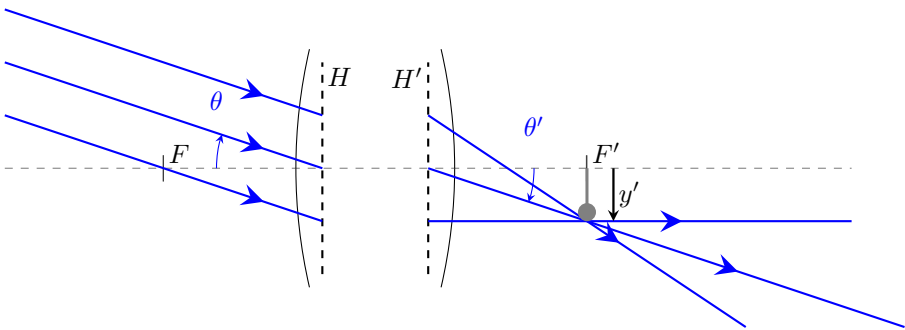


FIGURE 1 – Schéma de la conjugaison ∞ - Foyer d'un système optique. La taille y' de l'image d'un objet de dimension angulaire θ est $y' = f' \tan(\theta)$

De même, la distance focale d'un système optique détermine la dimension de l'image à l'infini d'un objet situé dans son plan focal, c'est à dire : $\tan(\theta') = -\frac{y}{f}$, voir la figure 2 ci-dessous.

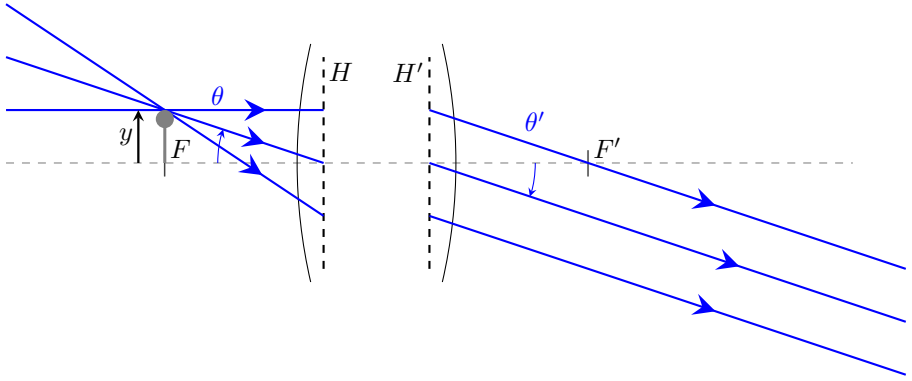


FIGURE 2 – Schéma de la conjugaison Foyer- ∞ d'un système optique. La dimension angulaire θ' de l'image d'un objet de dimension y est $\tan(\theta') = -\frac{y}{f}$

Pour un système optique placé dans l'air, $\theta = \theta'$ et $f = -f'$.

TP 1

Différentes méthodes de mesure de distance focale

Le TP se déroule sur deux séances. Le compte rendu global est à rendre une semaine après la deuxième séance.

Sommaire

1	Estimation rapide approximative de la distance focale d'un système optique	5
2	Estimation grossière de la distance focale utilisant une conjugaison à distance finie	6
3	Mesure de la distance focale en utilisant la conjugaison infini-foyer	8
4	Mesure de la distance focale en utilisant la conjugaison foyer - infini	10

1 Estimation rapide approximative de la distance focale d'un système optique

Comment savoir si un système optique est convergent ou divergent ? Et si il est convergent comment mesurer approximativement sa distance focale ? C'est le premier geste à apprendre en optique expérimentale !

La réponse est : Placez-le système optique sous un plafonnier de la salle de Travaux Pratiques et essayez de faire l'image de la lampe sur le sol. Puis mesurez la distance entre le système optique et le sol.

↪ Dans la boîte de systèmes optiques à étudier, déterminez les systèmes optiques qui sont convergents ou divergents. Puis estimez très approximativement la distance focale des systèmes convergents.

Q1 Expliquez pourquoi cette méthode de mesure est très approximative même si on l'effectue avec soin.

2 Estimation grossière de la distance focale utilisant une conjugaison à distance finie

Ces méthodes, permettant de mesurer la distance focale pour des systèmes minces, sont appelées méthode de Bessel (conjugaison pour les deux positions de Bessel) et méthode de Silberman (cas particulier de la conjugaison $2f-2f$). Elles ont déjà été abordées rapidement au cours du TPO d'optique instrumentale en début d'année. Elles supposent d'une part qu'on reste dans le domaine paraxial, mais surtout que le système optique est une lentille mince. De plus, elles ne sont utilisables que pour des systèmes convergents.

Estimation de la distance focale du doublet convergent

↪ Placez successivement sur le banc la source à LED blanche, l'objet transparent, la lentille et l'écran.

↪ Réglez rapidement à l'œil l'alignement de tous les éléments latéralement, en hauteur et bien perpendiculaire à l'axe.

↪ Placez l'écran suffisamment loin de l'objet pour obtenir l'image sur l'écran.

↪ Vérifiez qu'il existe deux positions (appelées les positions de Bessels) pour lesquelles on obtient une image sur l'écran.

↪ Utilisez le décalage des deux images obtenues pour les 2 positions de Bessel pour aligner parfaitement les éléments sur l'axe du banc optique.

↪ Mesurez la distance, D , entre l'objet et l'écran et la distance, d , entre les deux positions de Bessel.

↪ Vérifiez qu'il existe une distance minimale, D_{\min} , entre l'objet et l'écran pour laquelle on peut obtenir une image nette sur l'écran.

2. ESTIMATION GROSSIÈRE DE LA DISTANCE FOCALE UTILISANT UNE CONJUGAISON

↪ Vérifiez que pour cette position le grandissement est unitaire : $g_y = -1$.

↪ Vérifiez que tout grandissement est obtenu pour une et une seule position de la lentille par rapport à l'objet.

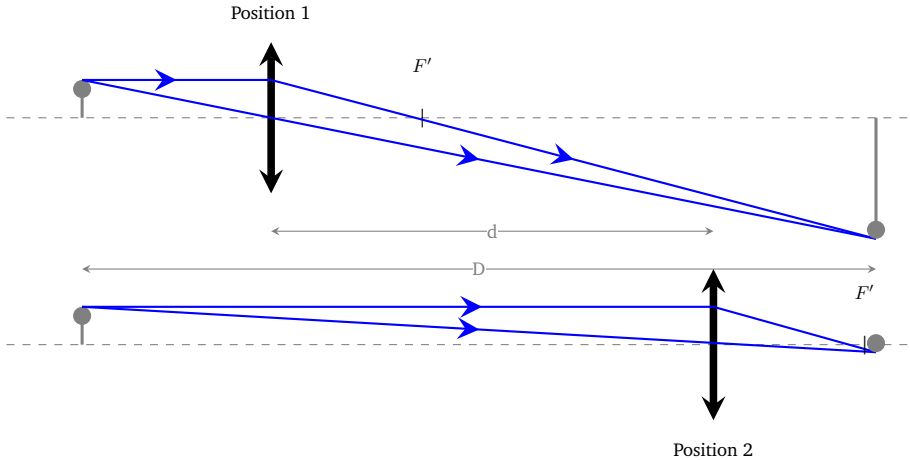


FIGURE 1.1 – Schéma illustrant les positions de Bessel

Q2 Montrez que la distance focale est donnée par la formule de Bessel (dans l'approximation lentille mince) :

$$f' = \frac{(D^2 - d^2)}{4D}$$

Q3 Pour le cas particulier de la conjugaison $2f - 2f$, montrer que l'on obtient la focale par la méthode de Silberman :

$$f' = \frac{D}{4}$$

↪ Effectuez plusieurs mesures de la distance focale par ces deux méthodes en modifiant la distance entre plan objet et plan image.

↪ Résumez dans un tableau les mesures de la distance focale obtenue.

Q4 Expliquez pourquoi ces méthodes ne peuvent donner qu'une valeur approximative de la distance.

3 Mesure de la distance focale en utilisant la conjugaison infini-foyer

3.1 Dispositif de mesure

En pratique, une mire graduée, M_c , placée au foyer du collimateur joue le rôle d'objet à l'infini dont la dimension angulaire est connue. La mesure de la dimension angulaire de la mire M_c a été effectuée soigneusement à l'aide d'un goniomètre. Elle est inscrite sur le collimateur en degrés, minutes ($1/60^\circ$) et secondes d'arc ($1/3600^\circ$).

La mesure de la dimension transversale, y' , de l'image de la mire graduée M_c , par le système optique à étudier permet donc d'obtenir simplement la focale d'un système optique. Cette mesure sera réalisée avec précision à l'aide d'un microscope (ou viseur).

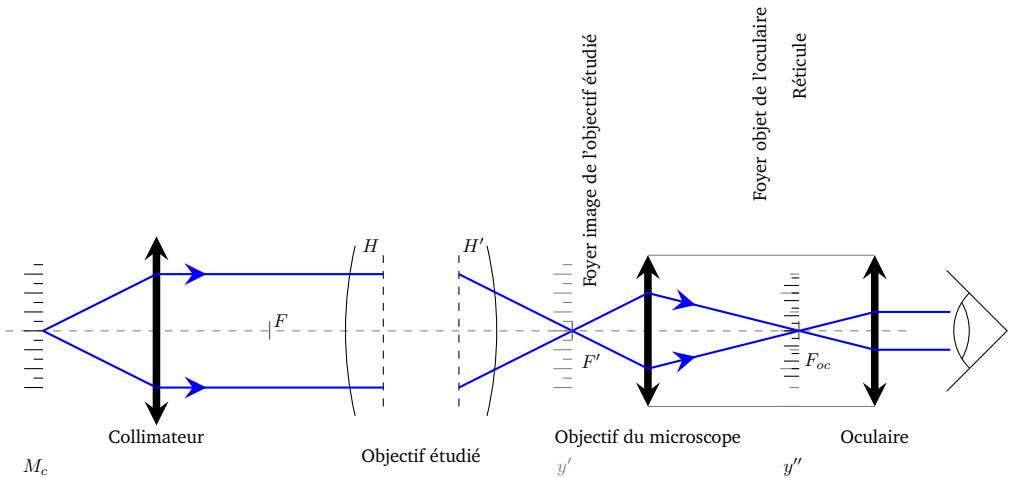


FIGURE 1.2 – Schéma complet du montage

Plusieurs protocoles sont possibles pour mesurer cette dimension y' :

1. la mesure de la dimension y'' , image agrandie de y' par l'objectif de microscope sur le réticule de l'oculaire,
2. la mesure directe de la dimension y' par déplacement transversal du microscope,

On s'intéresse ici à la première méthode, utilisant la mesure de la dimension y'' .

Q5 Faites un schéma clair du montage sur le document fourni en annexe (et disponible sur le site du LEnsE). Tracez le cheminement d'un faisceau de rayons (au moins 2 rayons donc !) pour un point objet de la mire graduée du collimateur hors d'axe.

3.2 Alignement du banc et réglage du microscope de banc

↪ Placez tous les éléments nécessaires sur le banc en vérifiant attentivement que tous les éléments sont bien centrés, à la hauteur du collimateur par exemple, et bien alignés.

↪ Prenez soin de placer le doublet convergent dans le bon sens d'utilisation.

Remarque : ce premier réglage sera toujours indispensable pour tous les montages optiques sur banc que vous utiliserez. Il est suffisant pour la mesure de la focale par cette méthode.

↪ Réglez l'oculaire à votre vue. Pour cela, dévissez le verre d'œil jusqu'à voir le réticule net, dépassez cette position, puis revissez doucement et vous arrêter dès que l'image du réticule est net, tout en gardant le deuxième œil ouvert afin d'éviter d'accommoder.

↪ Montez l'objectif de grandissement x2.5 sur le microscope de banc.

On souhaite donc mesurer l'image agrandie de la mire, y'' , par l'objectif du microscope de banc à l'aide du réticule de l'oculaire (pointé transversal). Le réticule des oculaires de longueur 10 mm est gradué en 1/10^{ème} de millimètre (100 graduations). Dans ce cas, il est nécessaire de déterminer avec précision le grandissement de l'objectif du microscope de banc à l'aide d'une mire objet, graduée elle aussi au 1/10^{ème} de millimètre.¹

Étalonnage de l'objectif du microscope de banc

↪ Placez la mire objet, éclairée par la lampe de bureau et observer avec le microscope l'image de cette mire.

1. On ne peut se fier aux valeurs de grandissement données par le constructeur car les longueurs de tubes utilisés pour nos microscopes de banc ne correspondent pas assez précisément aux valeurs standards des tubes de microscopes commerciaux (cf. cours et TP sur le microscope)

↪ Mesurez à l'aide du réticule de l'oculaire la taille de cette image. Pour cela il peut être nécessaire de déplacer le microscope transversalement afin d'aligner une graduation de l'image de la mire étalon avec une graduation du réticule de l'oculaire. Prendre le plus grand nombre de graduations pour diminuer les incertitudes de mesures.

Q6 Déduisez de cette mesure le grandissement apporté par l'objectif de microscope.

Q7 Quelle est l'incertitude de cette mesure si on suppose que la principale source d'incertitude est l'erreur de lecture d'une graduation sur le réticule de l'oculaire ?

Mesure de focale et incertitudes

Q8 Mesurez la focale du doublet (Clairaut). Indiquez l'incertitude de mesure. Référez vous à l'annexe sur "les incertitudes de mesures en TP".

4 Mesure de la distance focale en utilisant la conjugaison foyer - infini

On peut aussi mesurer la distance focale d'un système optique en plaçant un objet de dimension connue (ici la mire graduée) au foyer objet du système et mesurer la dimension angulaire de son image située à l'infini.

Q9 Faites un schéma pour expliquer cette méthode.

4.1 Calibration de la lunette afocale

Pour mesurer la dimension angulaire de l'image à l'infini, il faut dans un premier temps étalonner une lunette afocale réglée précisément à l'infini.

La lunette est équipée d'un oculaire x10 et d'un réticule gradué. Elle peut être réglée en déplaçant l'oculaire par rapport à objectif afin de viser :

- soit un objet à distance fini (on parle alors de viseur dioptrique),
- soit un objet à l'infini (c'est alors une lunette afocale).

Pour régler la lunette précisément à l'infini

↪ Commencez toujours par régler l'oculaire à votre œil.

4. MESURE DE LA DISTANCE FOCALE EN UTILISANT LA CONJUGAISON FOYER - INFINI

↪ Réglez la lunette à l'infini, dans un premier temps dans le couloir en espionnant les étudiants qui traineraient dans le foyer.

↪ Réglez précisément la lunette à l'infini devant le collimateur étalonné.

↪ Etalonnez cette lunette à l'aide du collimateur, c'est dire mesurez aussi précisément que possible à quel angle correspond une graduation du réticule de la lunette afocale.

4.2 Mesure de la distance focale du doublet en utilisant la conjugaison foyer - infini

↪ Placez maintenant la mire graduée dans le plan focal objet du doublet étudié. Ce réglage se fait à l'aide de la lunette, elle-même réglée à l'infini.

↪ En utilisant la calibration de la lunette effectuée précédemment, mesurez l'angle θ' correspondant à un certain nombre de graduation de la mire objet.

Q10 En déduire une nouvelle mesure de la distance focale que vous comparerez bien sûr aux mesures précédentes. Evaluer l'incertitude sur cette mesure.

↪ On refera la mesure pour l'autre orientation du doublet. Commentez le résultat.

TP 2

Mesures précises de distances focales et de frontales. Pointés longitudinaux

Sommaire

1	Pointés longitudinaux. Précautions d'alignement	13
2	Mesures précises de la focale d'un objectif vidéo	16
3	Mesures des frontales arrière et avant d'un objectif vidéo	16
4	Mesure de la distance focale d'une lentille simple divergente	19
5	Conception d'un téléobjectif	20
6	Conception d'une lunette de Galilée	20
	Annexe. Mesures de rayons de courbure	21

1 Pointés longitudinaux. Précautions d'alignement

Pour obtenir des mesures précises, le collimateur, le système optique étudié et le microscope de banc doivent avoir leur axe optique parallèle à l'axe de coulissage du banc de mesure. C'est ce réglage précis d'alignement des éléments placés sur banc optique que nous allons dans un premier temps étudier.

1.1 Alignement du banc à l'aide d'un faisceau laser

Régler précisément un banc d'optique, c'est amener les axes optiques des divers systèmes à être confondus entre eux (ce qui définit l'axe optique du montage) et parallèles à l'axe de coulissage du banc. Vous allez réaliser ce réglage par un alignement laser. Le faisceau d'une petite diode laser rouge va permettre de matérialiser l'axe de coulissage du banc et d'effectuer les positionnements des éléments par autocollimation.

Les étapes de ce réglage rapide sont décrites dans les paragraphes suivants.

1.2 Alignement du laser sur l'axe du banc

On dispose d'une diode laser suivie d'un dispositif à deux miroirs plans très astucieux, dit "tabouret optique". Ce dispositif utilise la propriété selon laquelle 2 miroirs sont nécessaires et suffisants pour aligner un faisceau laser sur une droite quelconque. Ce système permet un réglage indépendant de la translation et de la rotation du faisceau dans les deux directions, horizontale et verticale, comme indiqué sur les figures 2.1 et 2.2. Les translations du faisceau sont utilisées pour les réglages du trou à faible distance, les rotations pour les réglages à grande distance.

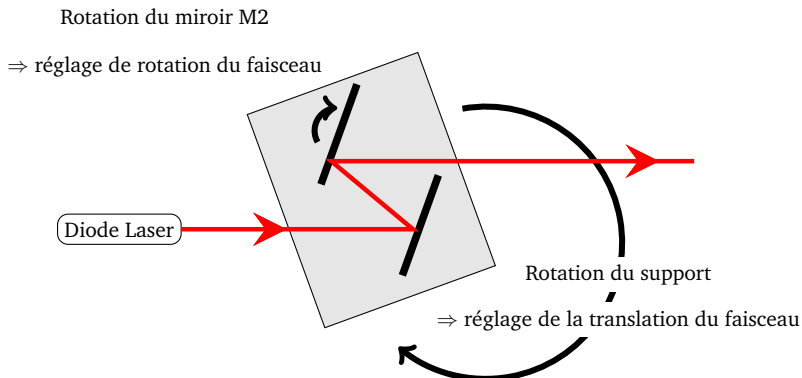


FIGURE 2.1 – Schéma de principe du "tabouret optique"

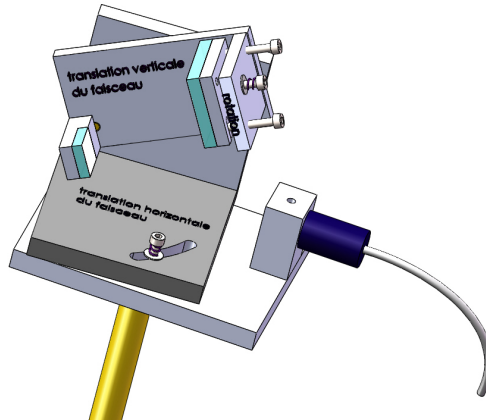


FIGURE 2.2 – Tabouret optique

- ↪ Alignez le faisceau laser avec l'axe du banc. Pour cela :
- Fixez un trou dans le mandrin auto-centreur (vérifiez que le mandrin est centré sur le banc pour que le trou le soit aussi!) et déplacez-le au bout du banc,
 - Réglez la rotation du faisceau à l'aide du "tabouret optique" afin que le faisceau laser traverse ce trou,
 - Repérez la position de ce trou à l'aide d'un écran percé d'un trou,
 - Déplacez ce carton perforé à l'autre extrémité du banc (très proche du "tabouret optique"),
 - Translatez le faisceau laser à l'aide du "tabouret optique" afin que le faisceau laser traverse ce trou,
 - Enfin, corrigez la rotation du faisceau afin qu'il traverse les deux trous, aux deux extrémités du banc.

Le faisceau laser est alors parfaitement parallèle à l'axe de coulissage du banc et matérialise l'axe optique du montage. Le trou métallique peut être ôté du mandrin.

1.3 Réglage des autres éléments

L'écran percé d'un trou permet de visualiser les taches qui résultent des réflexions sur les différents dioptrés.

- ↪ Centrez rapidement le collimateur sur l'axe optique, pour cela s'assurer que l'on a une seule tache. Puis basculez-le pour que le dioptré soit perpendiculaire à l'axe optique (obtention d'une tache centrée).

↪ Orientez très précisément l'objectif à étudier dans le mandrin autocentreur. Attention à ne pas toucher au déplacement transversal du mandrin qui a servi à définir l'axe optique !

↪ Réglez rapidement l'orientation du tube du microscope de banc.

2 Mesures précises de la focale d'un objectif vidéo

↪ Placez l'objectif vidéo dans le mandrin autocentreur dans le bon sens (filetage vers le foyer image, c'est-à-dire vers le capteur de la caméra).

↪ Réglez bien son orientation par autollimation du faisceau de la diode laser.

On souhaite utiliser le collimateur étalonné pour mesurer la distance focale de l'objectif vidéo, par la méthode $y' / \tan(\theta)$ vue lors de la première séance.

L'angle θ de la mire du collimateur dont l'image est à l'infini est connu. Pour mesurer la dimension de l'image correspondante, y' , plusieurs protocoles sont possibles :

1. la mesure de la dimension y'' , image agrandie de y' par l'objectif de microscope sur le réticule de l'oculaire,
2. la mesure directe de la dimension y' par déplacement transversal du microscope en utilisant le vernier de la platine de translation.

↪ Mesurez, en utilisant ces 2 protocoles, le plus précisément possible, la distance focale de l'objectif vidéo.

↪ On pourra aussi retourner l'objectif et vérifier si l'on peut faire facilement la mesure de la distance focale dans le mauvais sens d'utilisation.

3 Mesures des frontales arrière et avant d'un objectif vidéo

3.1 Mesure de frontale arrière

↪ Mesurez la frontale arrière de l'objectif vidéo (SF') : distance sommet du dioptré de sortie du système-foyer image). Pour cela :

3. MESURES DES FRONTALES ARRIÈRE ET AVANT D'UN OBJECTIF VIDÉO17

- déposez délicatement si nécessaire quelques grains de talc sur le sommet du dioptre visé à l'aide de la pointe d'un crayon (souvent il y a déjà assez de poussières !),
- placez le microscope de banc le plus précisément dans la position où il image le foyer image F' de l'objectif étudié et mettez à zéro le vernier numérique longitudinal,
- déplacez le microscope de banc jusqu'à ce que l'image du talc soit nette, la valeur de la frontale se lit ainsi directement sur le vernier.

Q11 Comparez les valeurs de la frontale arrière et de la distance focale. En déduire la position du plan H' par rapport au sommet du dernier dioptre, S , de l'objectif vidéo étudié.

L'incertitude de mesure sur les frontales (mais aussi sur le tirage) dépend de la précision des pointés longitudinaux. Cette précision dépend toujours du choix de l'objectif de microscope placé sur le microscope de banc. C'est ce que nous allons analyser dans la partie suivante.

3.2 Analyse de la précision

Pour obtenir une mesure précise de la frontale arrière, il faut que :

- l'axe de l'objectif soit placé le plus précisément parallèle à l'axe de coulissage (alignement laser),
- l'oculaire du microscope soit très bien réglé à votre vue (c'est à dire en évitant au maximum d'accommoder),
- la parallaxe entre le réticule de l'oculaire et l'image observée soit évitée.

Choix de l'objectif du microscope de banc

Lorsque l'on vise le plan focal image, l'ouverture numérique objet de l'objectif du microscope de banc utilisé, $ON = \sin(\alpha)$, doit donc être choisie supérieure à l'ouverture numérique image du système optique étudié. Autrement dit, la pupille du montage doit être, si cela est possible, la pupille du système étudié.

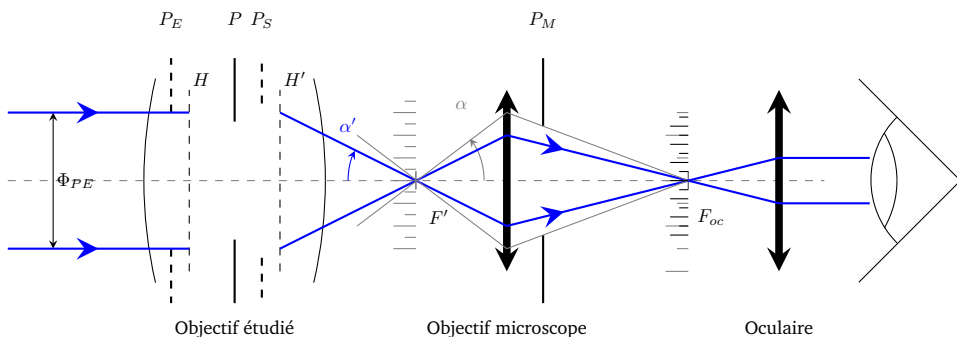


FIGURE 2.3 – L'ouverture numérique objet $\sin(\alpha)$ de l'objectif du microscope de banc doit être supérieure à l'ouverture numérique image, $\sin(\alpha')$, du système à mesurer. P_E , P_S et P sont respectivement la pupille d'entrée, la pupille de sortie et la pupille de l'objectif étudié. P_M est la pupille du microscope de banc.

Pour les objectifs de microscope, l'ouverture numérique objet, $ON = n \cdot \sin(\alpha)$, est gravée sur la monture.

Pour les autres objectifs, photo, vidéo, c'est à dire pour tous les systèmes qui sont habituellement utilisés en conjugaison infini-foyer, c'est le nombre d'ouverture, défini par $N = \frac{f'}{\Phi_{PE}}$, du système optique qui est indiqué sur la monture. En vertu de la relation d'Abbe (ou Relation Fondamentale des Systèmes Optiques d'Imagerie) :

$$\sin(\alpha') = \frac{\Phi_{PE}}{2f'} = \frac{1}{2N}$$

Q12 Quel objectif de microscope de banc choisissez-vous pour la mesure de la frontale de l'objectif vidéo compte tenu de son ouverture maximale (c'est à dire pour le nombre d'ouverture, N , minimum indiqué sur la monture) ?

Analyse en répétabilité sur la précision d'un pointé longitudinal.

Avec l'objectif de microscope de banc choisi, chaque manipulateur fera un test de précision de pointé. Ce test est destiné à comparer la précision estimée et la précision réelle de pointé (qui est propre à chaque expérimentateur).

4. MESURE DE LA DISTANCE FOCALE D'UNE LENTILLE SIMPLE DIVERGENTE 19

↪ Effectuez 10 pointés successifs chacun du plan focale image, F' , en défocalisant largement entre chaque pointé. Présentez les résultats avec l'écart type.

↪ Effectuez la même expérience avec un objectif de microscope de banc beaucoup plus fermé et comparez les précisions de pointé.

Analyse théorique

L'incertitude des pointés longitudinaux est due en principe à 3 facteurs :

- la diffraction,
- la profondeur d'accommodation,
- et l'incertitude de lecture.

(voir détails dans l'annexe)

Q13 Calculez la valeur de ces incertitudes et comparez à votre analyse en répétabilité.

3.3 Focale et frontale avant

↪ Utilisez l'objectif à étudier dans l'autre sens et mesurez la frontale avant du système optique.

Q14 Comparez la frontale avant et la distance focale. En déduire la position du plan H par rapport au sommet du premier dioptré, E , de l'objectif vidéo étudié.

La longueur de l'objectif, distance ES entre le premier et le dernier dioptré vous sera donnée.

↪ Tracez avec soin, à l'échelle 1, le schéma paraxial de l'objectif étudié (plans principaux, foyers et faces d'entrée et de sortie de l'objectif).

4 Mesure de la distance focale d'une lentille simple divergente

Le foyer image est virtuel pour une lentille divergente.

Q15 Choisissez et expliquez le choix de l'objectif de microscope que vous placerez sur le microscope.

↪ Mesurez aussi précisément que possible la focale et donner l'incertitude sur votre mesure.

5 Conception d'un téléobjectif

Un téléobjectif est un objectif d'appareil photo de longue focale (en gros de 135 mm à 600 mm). Pour limiter sa dimension, on obtient la focale souhaitée en associant successivement un système convergent suivi d'un système optique divergent. Nous pouvons donc modéliser de manière très simpliste un téléobjectif en associant le doublet convergent et la lentille divergente étudiés en première séance. Par exemple, cherchons à obtenir une distance focale de 400 mm.

Q16 En utilisant la formule de Gullstrand, calculez la distance, e , entre le doublet et la lentille divergente pour obtenir cette focale de 400 mm.

↪ Positionnez le doublet et la lentille divergente sur le banc optique en prenant soin aux alignements et en respectant cette distance, e .

↪ Mesurez la distance focale du système global par la méthode $y'/\tan(\theta)$

Q17 Comparez la focale obtenue avec la focale souhaitée. Pour quelle raison trouve-t-on une valeur différente? Vous pouvez appuyer votre raisonnement sur la valeur de la distance, e , calculée à partir de la valeur de la focale mesurée.

6 Conception d'une lunette de Galilée

Toujours en associant la lentille divergente et le doublet convergent étudié en première séance, nous pouvons modéliser une lunette afocale de Galilée.

Q18 Pour ce faire, quelle doit être la distance entre le doublet et la lentille divergente? Quel grossissement, θ'/θ devrait on obtenir?

↪ Positionnez le doublet et la lentille divergente sur le banc optique en respectant cette nouvelle distance.

Q19 Comment pouvez vous vérifier que l'on obtient bien ainsi une lunette afocale?

Q20 Comme pouvez-vous ajuster précisément la distance entre le doublet et la lentille divergente ? Quel instrument allez-vous utiliser ?

↪ Après avoir réglé précisément la distance entre le doublet et la lentille divergente, mesurez le grossissement du système afocal obtenu.

Q21 Comparez à la valeur attendue ? Commentez.

Q22 Si vous avez le temps, réalisez la même mesure mais en inversant la position des deux lentilles (divergente puis convergente).

Annexe. Mesures de rayons de courbure

Partie de démonstration.

Principe de la mesure par autocollimation

Cette méthode s'applique à la mesure des rayons de courbure de surfaces optiquement polies. Il existe pour un miroir sphérique, deux positions pour lesquelles l'image obtenue par réflexion et l'objet sont confondus : lorsque l'objet est au centre de courbure et lorsque l'objet coïncide avec la surface. La distance entre ces deux positions est égale au rayon de courbure. Pour pointer le sommet et le centre du miroir, on utilise un microscope autocollimateur (ou viseur autocollimateur). Le schéma de ce viseur à réticule éclairé est donné sur la figure 2.4, page 23.

Méthode de réglage :

- On règle rapidement le miroir à étudier sur l'axe du banc en utilisant le faisceau de la diode laser d'alignement,
- puis pointer un sommet, ce qui est facile puisque l'on connaît approximativement le plan de visée du viseur autocollimateur (on connaît la distance frontale de l'objectif),
- retirer l'oculaire et translater le viseur en direction du centre en observant attentivement la tache lumineuse que forme, dans la pupille de l'objectif, le faisceau réfléchi.
- En général, plus on s'éloigne du sommet plus la tache s'éloigne du centre de la pupille. On agit alors sur l'orientation du miroir pour maintenir cette tache au centre de la pupille.

- Quand on se trouve au voisinage du centre de courbure, la pupille doit à nouveau être complètement éclairée. On replace l'oculaire et en oscillant autour de cette position, on doit trouver le centre de courbure. On lit l'abscisse du centre.
- Translater le viseur pour viser le sommet correspondant à la direction de l'axe. On lit l'abscisse du sommet.

Précision de pointé

Il s'agit là encore de pointés longitudinaux. La précision des pointés longitudinaux augmente avec l'ouverture effective du montage. L'ouverture numérique objet du viseur utilisé doit donc être choisie supérieure à l'ouverture numérique du miroir étudié. Autrement dit, dans la mesure du possible, la pupille du montage doit être le miroir.

Q23 Expliquez comment choisir l'objectif de microscope du viseur autocollimateur pour obtenir la meilleure précision de pointé longitudinal.

Miroir concave. Mesures et incertitudes

↔ Mesurez le rayon de courbure du miroir concave placé dans une monture beige et évaluez la précision de cette mesure.

Q24 Comparez à l'erreur de pointé estimée.

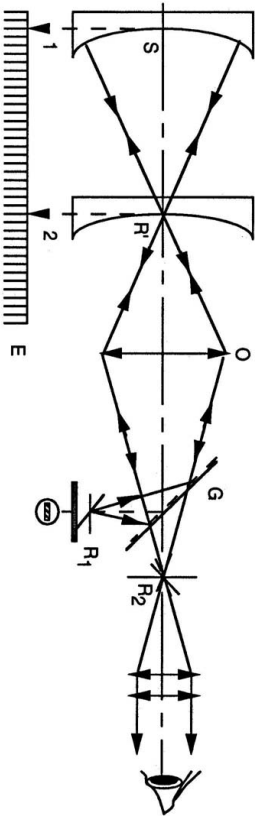


FIGURE 2.4 – Schéma de principe du viseur autocollimateur

Les incertitudes de mesure en travaux pratiques.

*On mesure l'intelligence d'un individu
à la quantité d'incertitudes qu'il est capable de supporter.*
Emmanuel Kant

*L'humour : l'ivresse de la relativité des choses humaines ;
le plaisir étrange issu de la certitude qu'il n'y a pas de certitude.*
Milan Kundera

Sommaire

1	Introduction	25
2	Présenter un résultat de mesures	26
3	Évaluation des incertitudes	27
4	Propagation des incertitudes	35

1 Introduction

Mesurer des grandeurs identifiées est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l'industrie. C'est aussi fondamental dans de nombreuses activités quotidiennes comme le pesage dans les commerces, les analyses biologiques, la mesure de vitesse avec un radar, . . .

Il est nécessaire d'établir la confiance dans les résultats fournis lors de ces mesures.

Mesurer une grandeur (intensité d'un courant, tension, longueur, . . .), n'est donc pas simplement rechercher la valeur de cette grandeur mais aussi lui associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la qualité de la mesure.

Déterminer une incertitude de mesure est une opération difficile et complexe, mais néanmoins indispensable (et pas seulement en TP, bien sûr).

Lorsque vous êtes verbalisé à 95 km/h pour une vitesse maximale autorisée de 90 km/h, vous êtes en droit de supposer que le radar a mesuré la vitesse de votre véhicule à 95 ± 3 km/h. Donc, si l'incertitude est donnée pour un intervalle de confiance de 99,7% (+/- 3 écart-types), votre véhicule roulait entre 92 et 98 km/h (avec une probabilité de 99,7 %). Pas de chance !

Quoi qu'il en soit, en Travaux Pratiques, vous ne devrez jamais donner un résultat de mesure sans l'accompagner de son incertitude, ... sous peine d'être "verbalisés".

2 Présenter un résultat de mesures

2.1 Des exemples

Vous mesurez l'angle d'un prisme. Le résultat doit être donné sous la forme :

$$A = 59^{\circ}58'45'' \pm 15''$$

Vous mesurez la focale d'un système optique :

$$f = 51,0 \text{ mm} \pm 1,5 \text{ mm}$$

Ou encore une résistance :

$$R = 101 \Omega \pm 5 \Omega$$

2.2 Chiffres significatifs

Donnez toujours les résultats avec un nombre raisonnable de chiffres significatifs et en accord avec l'incertitude. Surtout PAS de :

$$R = 101,6598 \Omega \pm 5 \Omega$$

Attention, en particulier, avec les tableaux Excel dans lesquels vous devez choisir le nombre de chiffres affichés, sous peine là encore de donner l'impression d'avoir obtenu des précisions hors échelle !

Si vous mesurez la distance focale d'un système par la méthode simple $y' / \tan(\theta)$ et que vous donnez le tableau suivant :

θ	θ (°)	y' (mm)	$f' = y' / \tan(\theta)$ (mm)
$2^{\circ}50'45''$	2,845833333	9,8	197,143412

TABLE 2.1 – Exemple A NE PAS suivre !

Vous prétendez alors mesurer la focale avec une précision nanométrique !
Préférez ce tableau :

θ	θ (°)	y' (mm)	$f' = y' / \tan(\theta)$ (mm)
2°50'45''	2,85	9,8	197

TABLE 2.2 – Exemple à préférer !

Et dans tous les cas, le résultat final de la mesure effectuée donnera l'incertitude, par exemple :

$$f' = 197 \pm 5 \text{ mm}$$

L'incertitude a au plus 2 chiffres significatifs et est toujours arrondie par valeur supérieure. Et pour la valeur mesurée, le dernier chiffre significatif a le même rang que celui de l'incertitude.

3 Évaluation des incertitudes

3.1 Vocabulaire et définitions

Mesurage (ou mesure). On appelle mesurage (ou mesure) l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

La valeur vraie. Lorsque l'on fait une mesure, c'est, bien sûr, que l'on ne connaît pas la valeur vraie. La valeur vraie est inconnaissable.

Dans un compte rendu, vous ne pouvez donc pas écrire que vous avez effectué une « bonne » mesure, car le résultat de mesure est « proche de la vraie valeur » ! Il est préférable de donner l'écart à la valeur tabulée (ou trouvée dans le Hand Book, ou donnée dans le polycopié, . . . , et qui elle aussi est, en principe, donnée avec son incertitude) est de tant, ou de tant de % en valeur relative. On peut ensuite comparer cet écart à votre évaluation de l'incertitude sur votre mesure.

Répétabilité : les résultats de mesures successives d'une même grandeur sont obtenus par la même méthode, par le même opérateur, avec les mêmes instruments de mesure, dans le même laboratoire, et à des intervalles de temps assez courts.

Reproductibilité : les résultats de mesures successives d'une même grandeur sont obtenus par méthodes différentes ou au moyen de différents instruments de mesure, par différents opérateurs dans différents laboratoires.

Erreur systématique : Par définition, l'erreur systématique est l'écart moyen à la valeur vraie : $M - \text{ValeurVraie}$. En toute rigueur, M est la moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages de la même grandeur, effectués dans les conditions de répétabilité et de reproductibilité. La vraie valeur étant inconnaisable, il en est de même pour l'erreur systématique. En revanche, si elle est détectée, une erreur systématique, doit évidemment être corrigée.

Ces définitions sont illustrées sur le graphique de la figure 2.5.

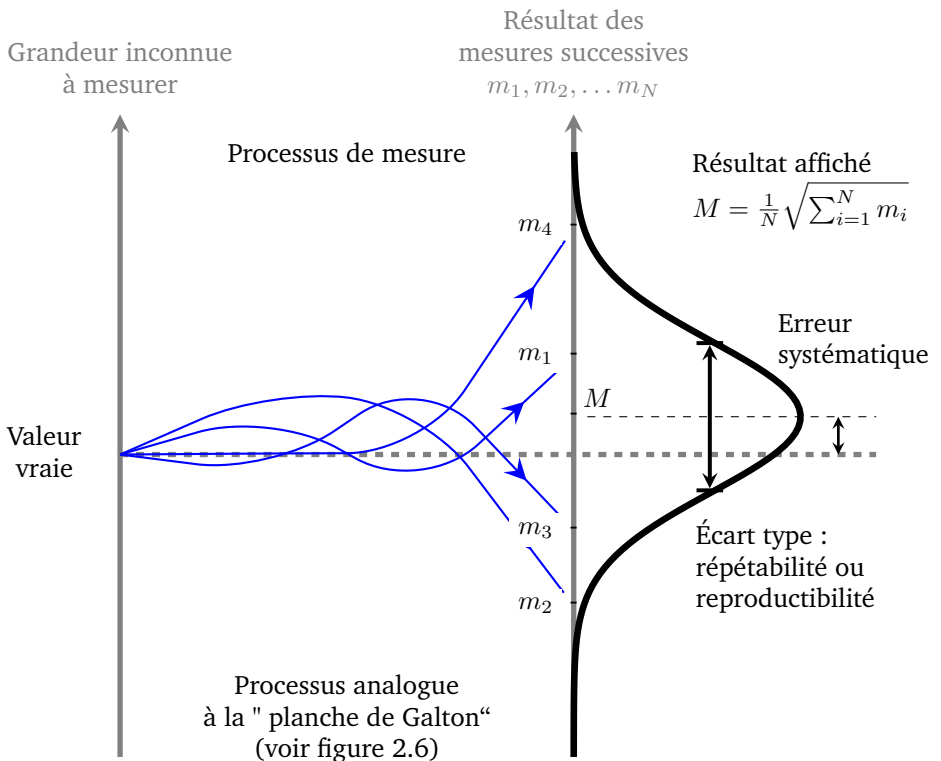


FIGURE 2.5 – Illustration du processus de mesure.

3.2 Méthode A : à l'aide de mesures multiples

Lorsqu'on répète plusieurs fois la mesure d'une grandeur physique, on obtient généralement différentes valeurs plus ou moins dispersées :

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

Dans la plupart des cas, ces résultats de mesure suivent une distribution normale (ou Gaussienne). Ceci provient du fait que plusieurs sources indépendantes contribuent généralement à cette erreur (Théorème Central Limite, cf. cours 1A Maths et signal et illustration de la figure 2.6).

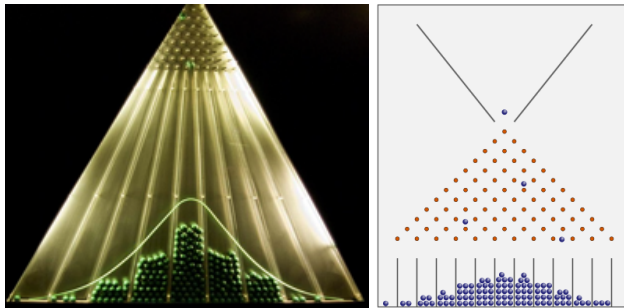


FIGURE 2.6 – Illustration de l'importance du modèle Gaussien des phénomènes aléatoires par l'expérience de la planche de Galton. La planche est inclinée. Les billes tombent et heurtent au hasard les clous (grand nombre de processus aléatoires) et se répartissent selon... une loi Gaussienne.

Crédit Wikipédia

A partir de ces résultats de mesures, on va pouvoir donner, la meilleure estimation du résultat de la mesure par la moyenne arithmétique :

$$M = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m_n \text{ pour } N \text{ mesures}$$

Et l'écart type expérimental :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (m_n - M)^2}$$

L'écart type expérimental pour une infinité de mesures de distribution gaussienne permet de calculer l'incertitude correspondant un intervalle de confiance. On affichera une incertitude de :

- $\Delta m = 2\sigma$ pour un intervalle de confiance à 95%
- $\Delta m = 3\sigma$ pour un intervalle de confiance à 99,7 %.

Ces "confiances à XX%" sont des probabilités, illustrées par les courbes de la figure 2.7 :

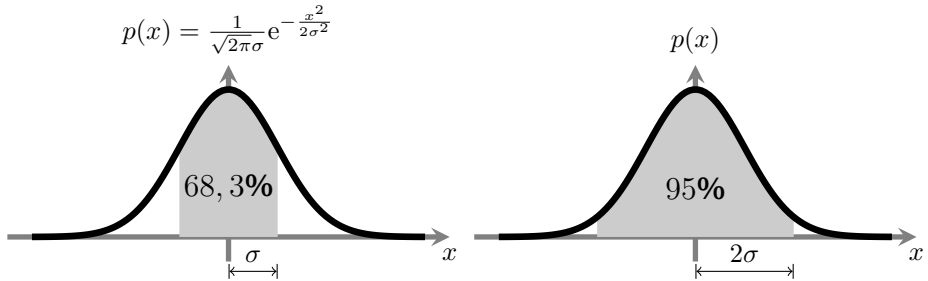


FIGURE 2.7 – Distribution Gaussienne et intervalles de confiance

Un nombre limité de mesures ne permet que d'estimer cet écart-type expérimental σ mais la loi de Student (tableau ci-dessous) permet le calcul de l'incertitude.

Niveau de confiance	5 mesures	10 mesures	20 mesures	> 100 mesures
50 %	$0,73 \cdot \sigma$	$0,70 \cdot \sigma$	$0,69 \cdot \sigma$	$0,67 \cdot \sigma$
68 %				σ
70 %	$1,16 \cdot \sigma$	$1,09 \cdot \sigma$	$1,06 \cdot \sigma$	$1,04 \cdot \sigma$
87 %				$1,5 \cdot \sigma$
90 %	$2,02 \cdot \sigma$	$1,81 \cdot \sigma$	$1,73 \cdot \sigma$	$1,65 \cdot \sigma$
95 %	$2,57 \cdot \sigma$	$2,23 \cdot \sigma$	$2,09 \cdot \sigma$	$1,96 \cdot \sigma$
99 %	$4,03 \cdot \sigma$	$3,17 \cdot \sigma$	$2,85 \cdot \sigma$	$2,56 \cdot \sigma$
99,7 %				$3 \cdot \sigma$
99,9 %	$6,87 \cdot \sigma$	$4,59 \cdot \sigma$	$3,85 \cdot \sigma$	$3,28 \cdot \sigma$
99,999 999 8 %				$6 \cdot \sigma$

TABLE 2.3 – Loi de Student : écart type et niveau de confiance

En travaux pratiques, on prendra simplement :

$$\Delta m = 2\sigma \text{ ou } 3\sigma$$

Ce qui, à partir de 10 mesures, correspond à un intervalle de confiance supérieur à 90%.

3.3 Méthode B : analyse "théorique"

Si vous ne faites qu'une seule mesure (ou seulement quelques mesures), l'approche statistique n'a pas de sens. Seule une analyse rigoureuse des sources d'incertitude est possible. C'est ce qui est désigné par une évaluation de type B de l'incertitude.

On doit essayer dans ce cas d'identifier toutes les sources d'incertitude dans le processus de mesure et d'évaluer leur importance. C'est en général la partie de loin la plus délicate du problème.

Exemple des pointés longitudinaux

Par exemple lorsqu'on effectue le pointé longitudinal du foyer image d'un système optique sur un banc à l'aide d'un viseur à frontale fixe, on identifie au moins trois sources d'incertitude : L'incertitude des pointés longitudinaux est due en principe à 3 facteurs :

- la diffraction,
- la profondeur d'accommodation,
- et l'incertitude de lecture.

La diffraction Le diamètre de la tache de diffraction est $\Phi = \frac{1.22\lambda}{n \sin(\alpha')}$, où λ désigne la longueur d'onde, ce qui entraîne une incertitude sur le pointé de :

$$\Delta z_{\text{diff}} \approx \frac{\Phi}{2 \tan(\alpha')} \approx \frac{\lambda}{2 (\alpha')^2}$$

(voir schéma de la figure 2.8).

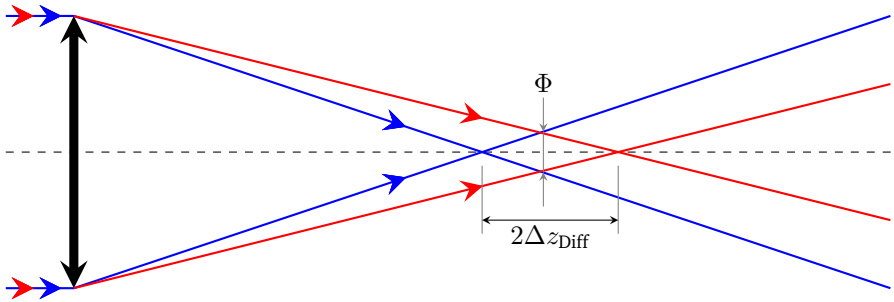


FIGURE 2.8 – Évaluation de l’incertitude de pointé due à la diffraction

Profondeur d’accomodation Cette incertitude correspond à l’erreur faite si l’œil accomode à la distance minimale (c’est à dire 250 mm pour un-e jeune étudiant-e) par rapport au fonctionnement normal de l’oculaire c’est à dire sans accomodation, image à l’infini.

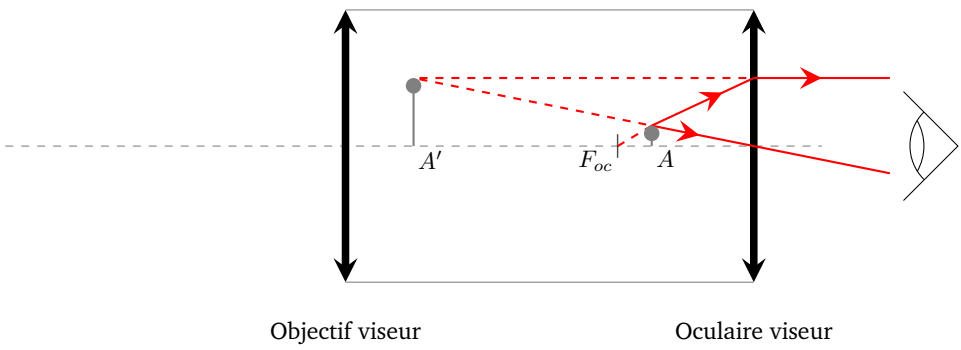


FIGURE 2.9 – Évaluation de l’incertitude de pointé due à l’accomodation. Au lieu de viser l’infini, l’œil vise A’. L’image de la mire est placée en A au lieu d’être placée au foyer objet de l’oculaire.

Le viseur est donc mal placé, le décalage est $\Delta z_{acc} = \frac{AF_{oc}}{(g_y)^2}$ car le grandissement longitudinal de l’objectif du viseur est $(g_y)^2$. Or par la formule de Newton :

$$\overline{F'_{oc}A'} \cdot \overline{F_{oc}A} = -f_{oc}^2$$

Or $F'_{oc}A' = 250$ mm (si l’œil est placé au niveau du plan focal image), on peut

donc écrire :

$$\Delta z_{\text{acc}} = \frac{f_{oc}^2}{(g_y)^2 \cdot 250}$$

(Et la focale de l'oculaire est $f_{oc} = 25$ mm si le grossissement commercial est de 10.)

L'incertitude de lecture :

$$\Delta z_{\text{lect}} = 0.02 \text{ mm}$$

sur les règles numériques en TP.

La variance d'une somme d'incertitudes se calcule aisément quand celles-ci sont décorrélées (fig.5). Dans la pratique, heureusement, les sources d'incertitudes sont le plus souvent indépendantes, donc décorrélées. Après avoir identifié les sources d'incertitude et leur valeur, il faut vérifier si ces sources sont corrélées ou non corrélées. Dans l'exemple précédent (comme dans la plupart des cas), elles sont indépendantes, on obtient alors l'incertitude globale en effectuant la somme quadratique des termes évalués (cf. Cours Maths et Signal 1A).

$$\Delta z_{\text{pointé longitudinal}} = \sqrt{\Delta z_{\text{diff}}^2 + \Delta z_{\text{acc}}^2 + \Delta z_{\text{lect}}^2}$$

Il est très important de noter que si une source d'incertitude est plus faible que les autres (par exemple 3 fois plus faible), son influence sera négligeable (9 fois plus faible que les autres sources dans ce cas) sur l'incertitude globale.

Dans l'exemple précédent des pointés longitudinaux, dans le cas où :

$$\Delta z_{\text{diff}} = 0.03 \text{ mm}$$

$$\Delta z_{\text{acc}} = 0.06 \text{ mm}$$

$$\Delta z_{\text{lect}} = 0.02 \text{ mm}$$

L'incertitude totale est alors : $\sqrt{\Delta z_{\text{diff}}^2 + \Delta z_{\text{acc}}^2 + \Delta z_{\text{lect}}^2}$

$$\Delta z_{\text{pointé longitudinal}} = 0.07 \text{ mm}$$

L'incertitude de lecture est négligeable et il est inutile de la prendre en compte.

Il est donc toujours très important d'essayer d'identifier les sources d'incertitudes les plus grandes. On néglige ensuite le plus souvent les sources dont l'influence est négligeable.

Sur les incertitudes de lecture

Appareil à affichage numérique : L'incertitude d'une mesure réalisée à l'aide d'un appareil à affichage numérique N'EST PAS donnée par le dernier chiffre affiché. Il est nécessaire de connaître les caractéristiques de l'appareil de mesure pour pouvoir l'évaluer. La documentation de l'appareil stipule généralement deux grandeurs sous la rubrique « précision ». La première valeur est une incertitude en pourcentage de la valeur lue, la deuxième est un nombre de digits qui correspond à l'incertitude sur le dernier chiffre affiché (attention : cette dernière correspond donc à une incertitude en pourcentage de la pleine échelle!).

Exemple : quelle est l'incertitude sur la valeur de 400.00 mA affichée par un ampère-mètre ? La documentation de l'ampère-mètre indique une précision de :

$$\pm 0,05\% \pm 4d$$

Alors le résultat de la mesure du courant est : $400.00 \pm 0.24 \text{ mA}$, que l'on peut réécrire avec une légère surestimation de l'incertitude : $400.0 \pm 0.3 \text{ mA}$.

Mais, si la valeur affichée est 001.12 mA, le résultat de la mesure du courant sera : $001.12 \pm 0.04 \text{ mA}$ soit une incertitude relative très médiocre de 3,6 % (il faut bien évidemment changer de le calibre si c'est possible !).

Lecture de graduations Sur un vernier ou un réticule, comme sur la figure 2.10, l'incertitude est donnée par l'écart entre 2 graduations, ΔGrad .

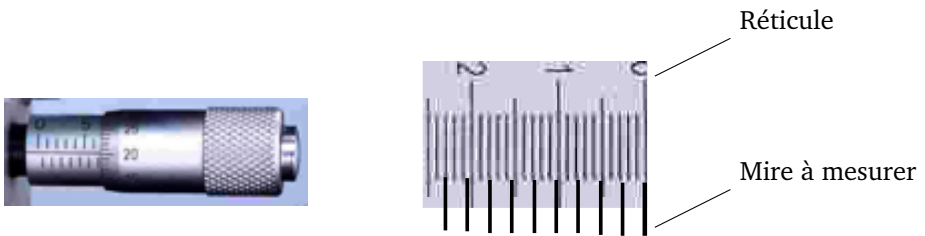


FIGURE 2.10 – Vernier de vis micrométrique et réticule d'oculaire

Le vernier des vis micrométriques est gradué au $2/100$ de mm. Il est prudent de faire confiance au constructeur et prendre une incertitude de lecture de $\pm 0,02 \text{ mm}$.

Autre exemple, un réticule d'oculaire vous permet de mesurer la dimension de l'image d'une mire graduée. L'espacement entre deux graduations est de 0.1 mm. On lit :

$$y' \text{ (9 graduations de la mire) } = 2,3 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$$

soit une précision relative de 4,3%. Utiliser un maximum de graduations du réticule permet de diminuer cette incertitude de lecture. Si on utilise les 100 graduations disponibles du réticule de 10 mm, l'incertitude de lecture relative sera à sa valeur minimale de l'ordre de 1%.

4 Propagation des incertitudes

Cette partie est parfois curieusement dénommée calcul d'incertitude. C'est de loin la partie la plus simple de toute cette annexe. Par exemple, vous cherchez à évaluer l'incertitude sur une grandeur y qui dépend d'une autre grandeur x , ($y = f(x)$) et vous avez évalué l'incertitude sur x . L'outil mathématique différentiel (ou dérivée) vous donne immédiatement le résultat. Ce que vous cherchez est l'influence d'une faible variation de x sur la grandeur y (voir figure 2.11). Et si vous avez peur de vous tromper dans le calcul formel de la dérivée, un calcul numérique à l'aide d'un tableau Excel (ou n'importe quel autre outil de calcul numérique, calculette, Matlab, ...) vous permet tellement simplement de vous passer du calcul formel de cette dérivée. L'incertitude sur y est :

$$\Delta y = \left| \frac{df}{dx}(x_{\text{mesuré}}) \right| \cdot \Delta x$$

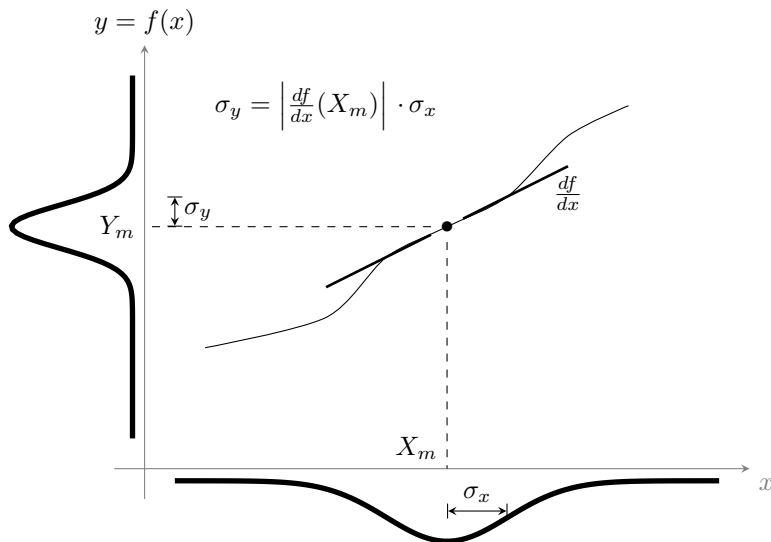


FIGURE 2.11 – Influence de l'écart-type d'une variable x sur la variable $y = f(x)$.

Si y dépend de plusieurs autres grandeurs selon :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

et que vous connaissez l'incertitude de chacune de ces grandeurs, c'est l'outil différentiel qui permet d'obtenir l'incertitude résultante sur la grandeur y . Les étapes du raisonnement :

Le calcul de la différentielle totale exacte permet tout d'abord de quantifier l'influence d'une faible variation de chacun des paramètres x_1, x_2, x_3, \dots sur la valeur de la grandeur y :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1m})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{2m})dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_{3m})dx_3 + \dots \quad (2.1)$$

Dans le cas d'une fonction f s'exprime sous forme de produits et de quotients, il est plus utile de déterminer la dérivée logarithmique. Par exemple dans le cas $y = \frac{x_1^2 x_2}{x_3}$ on obtient directement :

$$\frac{dy}{y} = 2 \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_3}{x_3}$$

La prise en compte de la somme des effets des incertitudes de chacune des variables est réalisé facilement si les grandeurs x_1, x_2, x_3, \dots sont toutes décorrélées les unes des autres. Dans ce cas, c'est une somme quadratique qui permet d'obtenir l'incertitude résultante :

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x_{1m})}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_{2m})}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_{3m})}{\partial x_3} \Delta x_3\right)^2 + \dots} \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une fonction f sous forme de produits ou de quotients, on exprime des incertitudes relatives plutôt qu'absolues directement à partir de la dérivée logarithmique, pour l'exemple précédent :

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2}$$

Pourquoi une somme quadratique? L'équation (2.1) décrit une variation dy comme une somme pondérée des variations dx_1, dx_2, \dots . Chacune de ces variations est modélisée par une variable aléatoire. La variable aléatoire dy s'écrit donc comme la somme de plusieurs variables aléatoires. **L'incertitude est proportionnelle à l'écart-type de cette variable aléatoire**, c'est à dire à l'"amplitude moyennée" des variations. Dans le cas de variables aléatoires dx_1, dx_2, \dots décorrélées, on sait que "la variance de la somme est égale à la

somme des variances", d'où la somme quadratique des écart-types et donc des incertitudes de l'équation (2.2). La figure 2.12 donne l'allure de la densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires gaussiennes decorrélées.

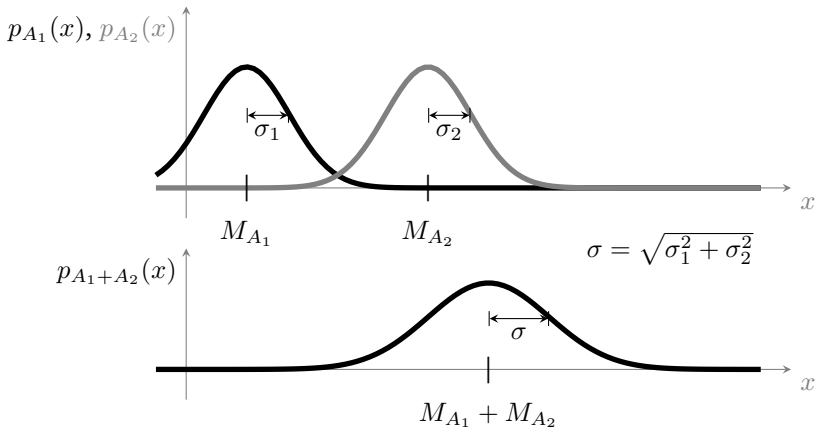


FIGURE 2.12 – Somme de deux variables aléatoires décorrelées A_1 et A_2 . Écart-type résultant

Si la dérivée est laborieuse à calculer, un calcul numérique avec Excel ou tout autre outil peut être utilisé. Par exemple, la mesure de l'indice n par le minimum de déviation d'un prisme est obtenue par la formule :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

D_m est l'angle minimum de déviation et A ... L'incertitude sur l'indice n dépend des incertitudes sur A et D_m (ΔA et ΔD_m). Avec un outil informatique de calcul, il est facile de calculer les deux grandeurs suivantes :

$$n + \Delta n_{D_m} = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m+\Delta D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad \text{et} \quad n + \Delta n_A = \frac{\sin\left(\frac{A+\Delta A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+\Delta A}{2}\right)}$$

L'incertitude sur l'indice n sera donnée par la somme quadratique des 2 termes, en supposant les incertitudes sur A et D_m non corrélées (elles le sont si elles sont statiquement indépendantes) :

$$\Delta n = \sqrt{\Delta n_{D_m}^2 + \Delta n_A^2}$$

Annexe. Schéma.

